

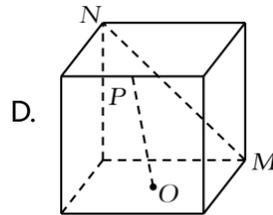
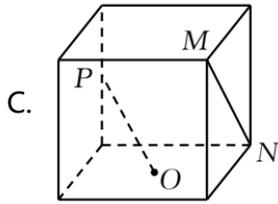
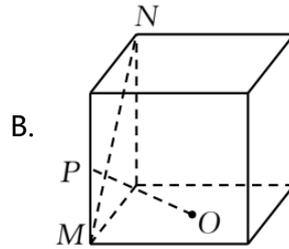
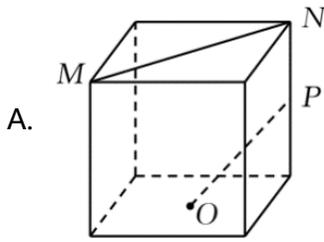
2021 年全国统一高考数学试卷 (新高考 II 卷)

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- 复数 $\frac{2-i}{1-3i}$ 在复平面内对应的点所在的象限为 ()
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
- 设集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3, 6\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 则 $A \cap (\complement_U B) =$ ()
A. $\{3\}$ B. $\{1, 6\}$ C. $\{5, 6\}$ D. $\{1, 3\}$
- 若抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点到直线 $y = x + 1$ 的距离为 $\sqrt{2}$, 则 $p =$ ()
A. 1 B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. 4
- 北斗三号全球卫星导航系统是我国航天事业的重要成果。在卫星导航系统中，地球静止同步卫星的轨道位于地球赤道所在平面，轨道高度为 36000km (轨道高度是指卫星到地球表面的距离)。将地球看作是一个球心为 O , 半径 r 为 6400km 的球，其上点 A 的纬度是指 OA 与赤道平面所成角的度数。地球表面上能直接观测到一颗地球静止同步轨道卫星点的纬度最大值为 α , 记卫星信号覆盖地球表面的表面积为 $S = 2\pi r^2(1 - \cos \alpha)$ (单位: km^2), 则 S 占地球表面积的百分比约为 ()
A. 26% B. 34% C. 42% D. 50%
- 正四棱台的上、下底面的边长分别为 2, 4, 侧棱长为 2, 则其体积为 ()
A. $20 + 12\sqrt{3}$ B. $28\sqrt{2}$ C. $\frac{56}{3}$ D. $\frac{28\sqrt{2}}{3}$
- 某物理量的测量结果服从正态分布 $N(10, \sigma^2)$, 下列结论中不正确的是 ()
A. σ 越小, 该物理量在一次测量中在 $(9.9, 10.1)$ 的概率越大
B. σ 越小, 该物理量在一次测量中大于 10 的概率为 0.5
C. σ 越小, 该物理量在一次测量中小于 9.99 与大于 10.01 的概率相等
D. σ 越小, 该物理量在一次测量中落在 $(9.9, 10.2)$ 与落在 $(10, 10.3)$ 的概率相等
- 已知 $a = \log_5 2$, $b = \log_8 3$, $c = \frac{1}{2}$, 则下列判断正确的是 ()
A. $c < b < a$ B. $b < a < c$ C. $a < c < b$ D. $a < b < c$
- 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(x+2)$ 为偶函数, $f(2x+1)$ 为奇函数, 则 ()
A. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ B. $f(-1) = 0$ C. $f(2) = 0$ D. $f(4) = 0$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

- 下列统计量中，能度量样本 x_1, x_2, \dots, x_n 的离散程度的是 ()
A. 样本 x_1, x_2, \dots, x_n 的标准差 B. 样本 x_1, x_2, \dots, x_n 的中位数
C. 样本 x_1, x_2, \dots, x_n 的极差 D. 样本 x_1, x_2, \dots, x_n 的平均数
- 如图，在正方体中， O 为底面的中心， P 为所在棱的中点， M, N 为正方体的顶点。则满足 $MN \perp OP$ 的是 ()



11. 已知直线 $l: ax + by - r^2 = 0$ 与圆 $C: x^2 + y^2 = r^2$, 点 $A(a, b)$, 则下列说法正确的是 ()

- A. 若点 A 在圆 C 上, 则直线 l 与圆 C 相切
 B. 若点 A 在圆 C 内, 则直线 l 与圆 C 相离
 C. 若点 A 在圆 C 外, 则直线 l 与圆 C 相离
 D. 若点 A 在直线 l 上, 则直线 l 与圆 C 相切

12. 设正整数 $n = a_0 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2 + \dots + a_{k-1} \cdot 2^{k-1} + a_k \cdot 2^k$, 其中 $a_i \in \{0, 1\}$, 记 $\omega(n) = a_0 + a_1 + \dots + a_k$. 则 ()

- A. $\omega(2n) = \omega(n)$
 B. $\omega(2n+3) = \omega(n) + 1$
 C. $\omega(8n+5) = \omega(4n+3)$
 D. $\omega(2^n - 1) = n$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 2, 则该双曲线的渐近线方程为 _____

14. 写出一个同时具有下列性质①②③的函数 $f(x)$: _____.

① $f(x_1 x_2) = f(x_1) f(x_2)$; ② 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$; ③ $f'(x)$ 是奇函数.

15. 已知向量 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} =$ _____.

16. 已知函数 $f(x) = |e^x - 1|$, $x_1 < 0, x_2 > 0$, 函数 $f(x)$ 的图象在点 $A(x_1, f(x_1))$ 和点 $B(x_2, f(x_2))$ 的两条切线互相垂直, 且分别交 y 轴于 M, N 两点, 则 $\frac{|AM|}{|BN|}$ 取值范围是 _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

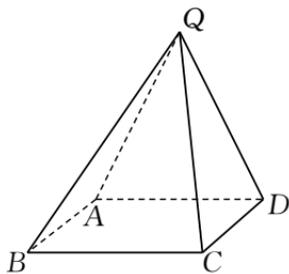
17. 记 S_n 是公差为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_3 = S_5, a_2 a_4 = S_4$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n ;
 (2) 求使 $S_n > a_n$ 成立的 n 的最小值.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边长分别为 a, b, c , $b = a + 1, c = a + 2$.

- (1) 若 $2 \sin C = 3 \sin A$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;
 (2) 是否存在正整数 a , 使得 $\triangle ABC$ 为钝角三角形? 若存在, 求出 a 的值; 若不存在, 说明理由.

19. 在四棱锥 $Q-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是正方形, 若 $AD = 2, QD = QA = \sqrt{5}, QC = 3$.



- (1) 证明: 平面 $QAD \perp$ 平面 $ABCD$;
 (2) 求二面角 $B-QD-A$ 的平面角的余弦值.

20. 已知椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 右焦点为 $F(\sqrt{2}, 0)$, 且离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
 (2) 设 M, N 是椭圆 C 上的两点, 直线 MN 与曲线 $x^2 + y^2 = b^2 (x > 0)$ 相切. 证明: M, N, F 三点共线的充要条件是 $|MN| = \sqrt{3}$.

21. 一种微生物群体可以经过自身繁殖不断生存下来, 设一个这种微生物为第 0 代, 经过一次繁殖后为第 1 代, 再经过一次繁殖后为第 2 代....., 该微生物每代繁殖的个数是相互独立的且有相同的分布列, 设 X 表示 1 个微生物个体繁殖下一代的个数, $P(X = i) = p_i (i = 0, 1, 2, 3)$.

- (1) 已知 $p_0 = 0.4, p_1 = 0.3, p_2 = 0.2, p_3 = 0.1$, 求 $E(X)$;
 (2) 设 p 表示该种微生物经过多代繁殖后临近灭绝的概率, p 是关于 x 的方程: $p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 = x$ 的一个最小正实根, 求证: 当 $E(X) \leq 1$ 时, $p = 1$, 当 $E(X) > 1$ 时, $p < 1$;
 (3) 根据你的理解说明 (2) 问结论的实际含义.

22. 已知函数 $f(x) = (x-1)e^x - ax^2 + b$.

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
 (2) 从下面两个条件中选一个, 证明: $f(x)$ 有一个零点

① $\frac{1}{2} < a \leq \frac{e^2}{2}, b > 2a$;

② $0 < a < \frac{1}{2}, b \leq 2a$.

2021 年全国统一高考数学试卷 (新高考全国 II 卷)

参考答案与试题解析

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 复数 $\frac{2-i}{1-3i}$ 在复平面内对应的点所在的象限为 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【思路分析】利用复数的除法可化简 $\frac{2-i}{1-3i}$ ，从而可求对应的点的位置。

【解析】：
$$\frac{2-i}{1-3i} = \frac{(2-i)(1+3i)}{10} = \frac{5+5i}{10} = \frac{1+i}{2}$$
，所以该复数对应的点为 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ，

该点在第一象限，故选：A.

2. 设集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3, 6\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ ，则 $A \cap (\complement_U B) = ()$

- A. $\{3\}$ B. $\{1, 6\}$ C. $\{5, 6\}$ D. $\{1, 3\}$

【思路分析】根据交集、补集的定义可求 $A \cap (\complement_U B)$ 。

【解析】：由题设可得 $\complement_U B = \{1, 5, 6\}$ ，故 $A \cap (\complement_U B) = \{1, 6\}$ ，故选：B.

3. 若抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点到直线 $y = x + 1$ 的距离为 $\sqrt{2}$ ，则 $p = ()$

- A. 1 B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. 4

【思路分析】首先确定抛物线的焦点坐标，然后结合点到直线距离公式可得 p 的值。

【解析】：抛物线的焦点坐标为 $(\frac{p}{2}, 0)$ ，其到直线 $x - y + 1 = 0$ 的距离：
$$d = \frac{|\frac{p}{2} - 0 + 1|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}$$
，解得：

$p = 2$ ($p = -6$ 舍去) 故选：B.

4. 北斗三号全球卫星导航系统是我国航天事业的重要成果。在卫星导航系统中，地球静止同步卫星的轨道位于地球赤道所在平面，轨道高度为 36000km (轨道高度是指卫星到地球表面的距离)。将地球看作是一个球心为 O ，半径 r 为 6400km 的球，其上点 A 的纬度是指 OA 与赤道平面所成角的度数。地球表面上能直接观测到一颗地球静止同步轨道卫星点的纬度最大值为 α ，记卫星信号覆盖地球表面的表面积为 $S = 2\pi r^2(1 - \cos \alpha)$ (单位： km^2)，则 S 占地球表面积的百分比约为 ()

- A. 26% B. 34% C. 42% D. 50%

【思路分析】由题意结合所给的表面积公式和球的表面积公式整理计算即可求得最终结果。

【解析】：由题意可得， S 占地球表面积的百分比约为：

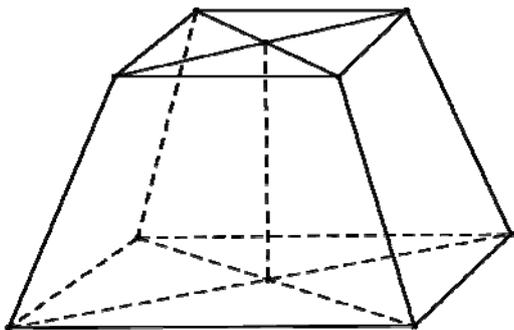
$$\frac{2\pi r^2(1 - \cos \alpha)}{4\pi r^2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} = \frac{1 - \frac{6400}{6400 + 36000}}{2} \approx 0.42 = 42\%$$
 故选：C.

5. 正四棱台的上、下底面的边长分别为 2，4，侧棱长为 2，则其体积为 ()

- A. $20 + 12\sqrt{3}$ B. $28\sqrt{2}$ C. $\frac{56}{3}$ D. $\frac{28\sqrt{2}}{3}$

【思路分析】由四棱台的几何特征算出该几何体的高及上下底面面积，再由棱台的体积公式即可得解。

【解析】：作出图形，连接该正四棱台上下底面的中心，如图，



因为该四棱台上下底面边长分别为 2, 4, 侧棱长为 2,

所以该棱台的高 $h = \sqrt{2^2 - (2\sqrt{2} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$, 下底面面积 $S_1 = 16$, 上底面面积 $S_2 = 4$,

所以该棱台的体积 $V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}) = \frac{1}{3} \times \sqrt{2} \times (16 + 4 + \sqrt{64}) = \frac{28}{3}\sqrt{2}$. 故选: D.

6. 某物理量的测量结果服从正态分布 $N(10, \sigma^2)$, 下列结论中不正确的是 ()

- A. σ 越小, 该物理量在一次测量中在 $(9.9, 10.1)$ 的概率越大
- B. σ 越小, 该物理量在一次测量中大于 10 的概率为 0.5
- C. σ 越小, 该物理量在一次测量中小于 9.99 与大于 10.01 的概率相等
- D. σ 越小, 该物理量在一次测量中落在 $(9.9, 10.2)$ 与落在 $(10, 10.3)$ 的概率相等

【思路分析】由正态分布密度曲线的特征逐项判断即可得解.

【解析】: 对于 A, σ^2 为数据的方差, 所以 σ 越小, 数据在 $\mu = 10$ 附近越集中, 所以测量结果落在 $(9.9, 10.1)$ 内的概率越大, 故 A 正确;

对于 B, 由正态分布密度曲线的对称性可知该物理量一次测量大于 10 的概率为 0.5, 故 B 正确;

对于 C, 由正态分布密度曲线的对称性可知该物理量一次测量结果大于 10.01 的概率与小于 9.99 的概率相等, 故 C 正确;

对于 D, 因为该物理量一次测量结果落在 $(9.9, 10.0)$ 的概率与落在 $(10.2, 10.3)$ 的概率不同, 所以一次测量结果落在 $(9.9, 10.2)$ 的概率与落在 $(10, 10.3)$ 的概率不同, 故 D 错误.

故选: D.

7. 已知 $a = \log_5 2$, $b = \log_8 3$, $c = \frac{1}{2}$, 则下列判断正确的是 ()

- A. $c < b < a$
- B. $b < a < c$
- C. $a < c < b$
- D. $a < b < c$

【思路分析】对数函数的单调性可比较 a 、 b 与 c 的大小关系, 由此可得出结论.

【解析】: $a = \log_5 2 < \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2} = \log_8 2\sqrt{2} < \log_8 3 = b$, 即 $a < c < b$. 故选: C.

8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(x+2)$ 为偶函数, $f(2x+1)$ 为奇函数, 则 ()

- A. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$
- B. $f(-1) = 0$
- C. $f(2) = 0$
- D. $f(4) = 0$

【思路分析】推导出函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数, 由已知条件得出 $f(1) = 0$, 结合已知条件可得出结论.

【解析】: 因为函数 $f(x+2)$ 为偶函数, 则 $f(2+x) = f(2-x)$, 可得 $f(x+3) = f(1-x)$, 因为函数 $f(2x+1)$ 为奇函数, 则 $f(1-2x) = -f(2x+1)$, 所以, $f(1-x) = -f(x+1)$,

所以, $f(x+3) = -f(x+1) = f(x-1)$, 即 $f(x) = f(x+4)$,

故函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数,

因为函数 $F(x) = f(2x+1)$ 为奇函数, 则 $F(0) = f(1) = 0$,

故 $f(-1) = -f(1) = 0$, 其它三个选项未知. 故选: B.

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 下列统计量中, 能度量样本 x_1, x_2, \dots, x_n 的离散程度的是 ()

- A. 样本 x_1, x_2, \dots, x_n 的标准差
- B. 样本 x_1, x_2, \dots, x_n 的中位数
- C. 样本 x_1, x_2, \dots, x_n 的极差
- D. 样本 x_1, x_2, \dots, x_n 的平均数

【思路分析】考查所给的选项哪些是考查数据的离散程度, 哪些是考查数据的集中趋势即可确定正确选项.

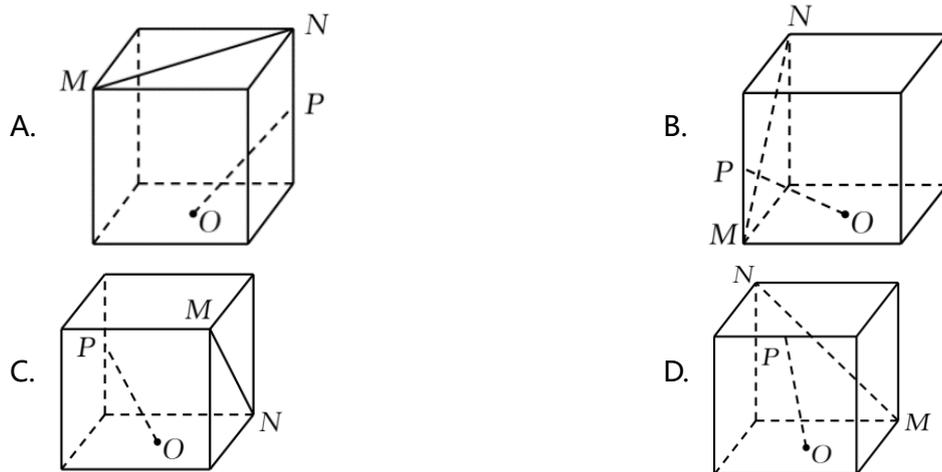
【解析】: 由标准差的定义可知, 标准差考查的是数据的离散程度;

由中位数的定义可知, 中位数考查的是数据的集中趋势;

由极差的定义可知, 极差考查的是数据的离散程度;

由平均数的定义可知, 平均数考查的是数据的集中趋势; 故选: AC

10. 如图, 在正方体中, O 为底面的中心, P 为所在棱的中点, M, N 为正方体的顶点. 则满足 $MN \perp OP$ 的是 ()



【思路分析】根据线面垂直的判定定理可得 BC 的正误, 平移直线 MN 构造所考虑的线线角后可判断 AD 的正误.

【解析】: 设正方体的棱长为 2,

对于 A, 如图 (1) 所示, 连接 AC , 则 $MN \parallel AC$,

故 $\angle POC$ (或其补角) 为异面直线 OP, MN 所成的角,

在直角三角形 OPC , $OC = \sqrt{2}$, $CP = 1$, 故 $\tan \angle POC = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

故 $MN \perp OP$ 不成立, 故 A 错误. (或者易得 OP 在上底面的射影为 MN , 故 $MN \perp OP$ 不成立)

对于 D, 如图 (4), 取 AD 的中点 Q, AB 的中点 K, 连接 AC, PQ, OQ, PK, OK, 则 $AC \parallel MN$, 因为 $DP = PC$, 故 $PQ \parallel AC$, 故 $PQ \parallel MN$, 所以 $\angle QPO$ 或其补角为异面直线 PO, MN 所成的角,

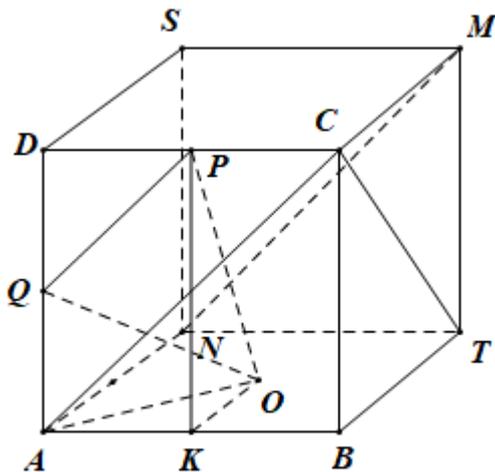


图 (4)

因为正方体的棱长为 2, 故 $PQ = \frac{1}{2}AC = \sqrt{2}$, $OQ = \sqrt{AO^2 + AQ^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$, $PO = \sqrt{PK^2 + OK^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$, $QO^2 < PQ^2 + OP^2$, 故 $\angle QPO$ 不是直角, 故 PO, MN 不垂直, 故 D 错误. 故选: BC

11. 已知直线 $l: ax + by - r^2 = 0$ 与圆 $C: x^2 + y^2 = r^2$, 点 $A(a, b)$, 则下列说法正确的是 ()

- A. 若点 A 在圆 C 上, 则直线 l 与圆 C 相切
 B. 若点 A 在圆 C 内, 则直线 l 与圆 C 相离
 C. 若点 A 在圆 C 外, 则直线 l 与圆 C 相离
 D. 若点 A 在直线 l 上, 则直线 l 与圆 C 相切

【思路分析】转化点与圆、点与直线的位置关系为 $a^2 + b^2, r^2$ 的大小关系, 结合点到直线的距离及直线与圆的位置关系即可得解.

【解析】: 圆心 $C(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d = \frac{r^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,

若点 $A(a,b)$ 在圆 C 上, 则 $a^2 + b^2 = r^2$, 所以 $d = \frac{r^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = |r|$,

则直线 l 与圆 C 相切, 故 A 正确;

若点 $A(a,b)$ 在圆 C 内, 则 $a^2 + b^2 < r^2$, 所以 $d = \frac{r^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} > |r|$,

则直线 l 与圆 C 相离, 故 B 正确;

若点 $A(a,b)$ 在圆 C 外, 则 $a^2 + b^2 > r^2$, 所以 $d = \frac{r^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} < |r|$,

则直线 l 与圆 C 相交, 故 C 错误;

若点 $A(a,b)$ 在直线 l 上, 则 $a^2 + b^2 - r^2 = 0$ 即 $a^2 + b^2 = r^2$,

所以 $d = \frac{r^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = |r|$, 直线 l 与圆 C 相切, 故 D 正确. 故选: ABD.

12. 设正整数 $n = a_0 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2^1 + \dots + a_{k-1} \cdot 2^{k-1} + a_k \cdot 2^k$, 其中 $a_i \in \{0, 1\}$, 记 $\omega(n) = a_0 + a_1 + \dots + a_k$. 则

()

A. $\omega(2n) = \omega(n)$

B. $\omega(2n+3) = \omega(n)+1$

C. $\omega(8n+5) = \omega(4n+3)$

D. $\omega(2^n - 1) = n$

【思路分析】利用 $\omega(n)$ 的定义可判断 ACD 选项的正误, 利用特殊值法可判断 B 选项的正误.

【解析】: 对于 A 选项, $\omega(n) = a_0 + a_1 + \dots + a_k$, $2n = a_0 \cdot 2^1 + a_1 \cdot 2^2 + \dots + a_{k-1} \cdot 2^k + a_k \cdot 2^{k+1}$, 所以, $\omega(2n) = a_0 + a_1 + \dots + a_k = \omega(n)$, A 选项正确;

对于 B 选项, 取 $n=2$, $2n+3=7=1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2$, $\therefore \omega(7)=3$,

而 $2=0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1$, 则 $\omega(2)=1$, 即 $\omega(7) \neq \omega(2)+1$, B 选项错误;

对于 C 选项, $8n+5 = a_0 \cdot 2^3 + a_1 \cdot 2^4 + \dots + a_k \cdot 2^{k+3} + 5 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^2 + a_0 \cdot 2^3 + a_1 \cdot 2^4 + \dots + a_k \cdot 2^{k+3}$, 所以, $\omega(8n+5) = 2 + a_0 + a_1 + \dots + a_k$,

$4n+3 = a_0 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^3 + \dots + a_k \cdot 2^{k+2} + 3 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^3 + \dots + a_k \cdot 2^{k+2}$,

所以, $\omega(4n+3) = 2 + a_0 + a_1 + \dots + a_k$, 因此, $\omega(8n+5) = \omega(4n+3)$, C 选项正确;

对于 D 选项, $2^n - 1 = 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1}$, 故 $\omega(2^n - 1) = n$, D 选项正确.

故选: ACD.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 2, 则该双曲线的渐近线方程为 _____

【思路分析】由双曲线离心率公式可得 $\frac{b^2}{a^2} = 3$, 再由渐近线方程即可得解.

【解析】: 因为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 2,

所以 $e = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = 2$, 所以 $\frac{b^2}{a^2} = 3$,

所以该双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \sqrt{3}x$. 故答案为: $y = \pm \sqrt{3}x$.

【归纳总结】本题考查了双曲线离心率的应用及渐近线的求解, 考查了运算求解能力, 属于基础题.

14. 写出一个同时具有下列性质①②③的函数 $f(x)$: _____.

① $f(x_1 x_2) = f(x_1) f(x_2)$; ② 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$; ③ $f'(x)$ 是奇函数.

【思路分析】根据幂函数的性质可得所求的 $f(x)$.

【解析】: 取 $f(x) = x^4$, 则 $f(x_1 x_2) = (x_1 x_2)^4 = x_1^4 x_2^4 = f(x_1) f(x_2)$, 满足①,

$f'(x) = 4x^3$, $x > 0$ 时有 $f'(x) > 0$, 满足②,

$f'(x) = 4x^3$ 的定义域为 R ,

又 $f'(-x) = -4x^3 = -f'(x)$, 故 $f'(x)$ 是奇函数, 满足③.

故答案为: $f(x) = x^4$ (答案不唯一, $f(x) = x^{2n} (n \in N^*)$ 均满足)

【归纳总结】熟悉常见基本初等函数的基本性质有利于进行构造.

15. 已知向量 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} =$ _____.

【思路分析】由已知可得 $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = 0$, 展开化简后可得结果.

【解析】：由已知可得 $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 9 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 0$ ，
因此， $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = -\frac{9}{2}$ 。故答案为： $-\frac{9}{2}$ 。

【归纳总结】三个数的完全平方的式子要熟悉。

16. 已知函数 $f(x) = |e^x - 1|$, $x_1 < 0, x_2 > 0$, 函数 $f(x)$ 的图象在点 $A(x_1, f(x_1))$ 和点 $B(x_2, f(x_2))$ 的两条切线互相垂直, 且分别交 y 轴于 M, N 两点, 则 $\frac{|AM|}{|BN|}$ 取值范围是_____。

【思路分析】结合导数的几何意义可得 $x_1 + x_2 = 0$, 结合直线方程及两点间距离公式可得 $|AM| = \sqrt{1 + e^{2x_1}} \cdot |x_1|$, $|BN| = \sqrt{1 + e^{2x_2}} \cdot |x_2|$, 化简即可得解。

【解析】：解法一：由题意， $f(x) = |e^x - 1| = \begin{cases} 1 - e^x, & x < 0 \\ e^x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$, 则 $f'(x) = \begin{cases} -e^x, & x < 0 \\ e^x, & x > 0 \end{cases}$ ，

所以点 $A(x_1, 1 - e^{x_1})$ 和点 $B(x_2, e^{x_2} - 1)$, $k_{AM} = -e^{x_1}, k_{BN} = e^{x_2}$,

所以 $-e^{x_1} \cdot e^{x_2} = -1, x_1 + x_2 = 0$,

所以 $AM: y - 1 + e^{x_1} = -e^{x_1}(x - x_1), M(0, e^{x_1}x_1 - e^{x_1} + 1)$,

所以 $|AM| = \sqrt{x_1^2 + (e^{x_1}x_1)^2} = \sqrt{1 + e^{2x_1}} \cdot |x_1|$,

同理 $|BN| = \sqrt{1 + e^{2x_2}} \cdot |x_2|$,

所以 $\frac{|AM|}{|BN|} = \frac{\sqrt{1 + e^{2x_1}} \cdot |x_1|}{\sqrt{1 + e^{2x_2}} \cdot |x_2|} = \frac{\sqrt{1 + e^{2x_1}}}{\sqrt{1 + e^{2x_2}}} = \sqrt{\frac{1 + e^{2x_1}}{1 + e^{-2x_1}}} = e^{x_1} \in (0, 1)$ 。

故答案为： $(0, 1)$

解法二：(浙江王海雷补解) 由题 $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x > 0 \\ -e^x + 1, & x < 0 \end{cases}$, 得 $f'(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ -e^x, & x < 0 \end{cases}$

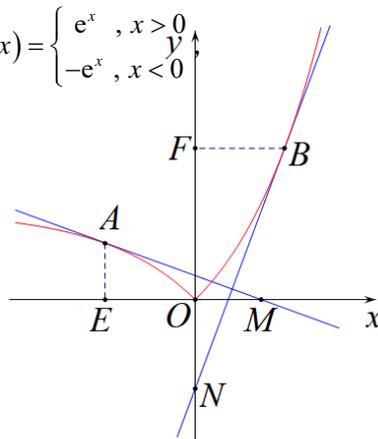
故 $k_{AM} = -e^{x_1}, k_{AN} = e^{x_2}$,

又 $AM \perp AN \Rightarrow k_{AM} \cdot k_{AN} = -e^{x_1 + x_2} = -1$, 得 $x_1 + x_2 = 0$,

如图易得 $\triangle AEM \sim \triangle BFN$, 且有 $|BF| = |OE|$,

所以 $\frac{|AM|}{|BN|} = \frac{|AE|}{|BF|} = \frac{|AE|}{|OE|} = \tan \angle AOE$,

而 $0 < \tan \angle AOE < e^0 = 1$, 所以 $\frac{|AM|}{|BN|} \in (0, 1)$ 。故填： $(0, 1)$ 。



【归纳总结】

解决本题的关键是利用导数的几何意义转化条件 $x_1 + x_2 = 0$, 消去一个变量后, 运算即可得解。

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 记 S_n 是公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_3 = S_5, a_2 a_4 = S_4$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n ;

(2) 求使 $S_n > a_n$ 成立的 n 的最小值。

【思路分析】(1)由题意首先求得 a_3 的值, 然后结合题意求得数列的公差即可确定数列的通项公式;

(2)首先求得前 n 项和的表达式, 然后求解二次不等式即可确定 n 的最小值。

【解析】：(1)由等差数列的性质可得： $S_5 = 5a_3$, 则： $a_3 = 5a_3, \therefore a_3 = 0$,

设等差数列的公差为 d ，从而有： $a_2 a_4 = (a_3 - d)(a_3 + d) = -d^2$ ，

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = (a_3 - 2d) + (a_3 - d) + a_3 + (a_3 + d) = -2d，$$

从而： $-d^2 = -2d$ ，由于公差不为零，故： $d = 2$ ，

数列的通项公式为： $a_n = a_3 + (n-3)d = 2n - 6$ 。

(2) 由数列的通项公式可得： $a_1 = 2 - 6 = -4$ ，则： $S_n = n \times (-4) + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n^2 - 6n$ ，

则不等式 $S_n > a_n$ 即： $n^2 - 5n > 2n - 6$ ，整理可得： $(n-1)(n-6) > 0$ ，

解得： $n < 1$ 或 $n > 6$ ，又 n 为正整数，故 n 的最小值为 7。

【归纳总结】等差数列基本量的求解是等差数列中的一类基本问题，解决这类问题的关键在于熟练掌握等差数列的有关公式并能灵活运用。

18. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A 、 B 、 C 所对的边长分别为 a 、 b 、 c ， $b = a + 1$ ， $c = a + 2$..

(1) 若 $2\sin C = 3\sin A$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积；

(2) 是否存在正整数 a ，使得 $\triangle ABC$ 为钝角三角形？若存在，求出 a 的值；若不存在，说明理由。

【思路分析】(1) 由正弦定理可得出 $2c = 3a$ ，结合已知条件求出 a 的值，进一步可求得 b 、 c 的值，利用余弦定理以及同角三角函数的基本关系求出 $\sin B$ ，再利用三角形的面积公式可求得结果；

(2) 分析可知，角 C 为钝角，由 $\cos C < 0$ 结合三角形三边关系可求得整数 a 的值。

【解析】：(1) 因为 $2\sin C = 3\sin A$ ，则 $2c = 2(a+2) = 3a$ ，则 $a = 4$ ，故 $b = 5$ ， $c = 6$ ，

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{8}，\text{所以，} C \text{ 为锐角，则 } \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{3\sqrt{7}}{8}，$$

$$\text{因此，} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{15\sqrt{7}}{4}；$$

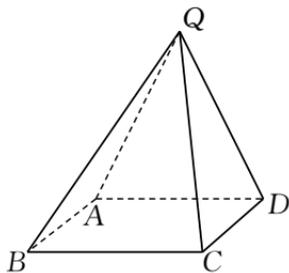
(2) 显然 $c > b > a$ ，若 $\triangle ABC$ 为钝角三角形，则 C 为钝角，

$$\text{由余弦定理可得 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + (a+1)^2 - (a+2)^2}{2a(a+1)} = \frac{a^2 - 2a - 3}{2a(a+1)} < 0，$$

解得 $-1 < a < 3$ ，则 $0 < a < 3$ ，

由三角形三边关系可得 $a + a + 1 > a + 2$ ，可得 $a > 1$ ， $\therefore a \in Z$ ，故 $a = 2$ 。

19. 在四棱锥 $Q-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，若 $AD = 2$ ， $QD = QA = \sqrt{5}$ ， $QC = 3$ 。

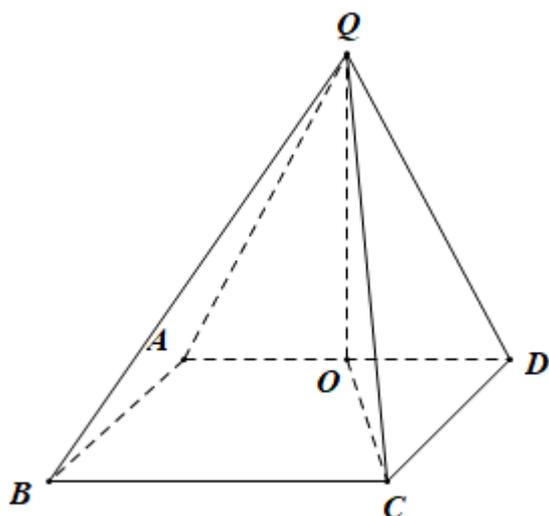


(1) 证明：平面 $QAD \perp$ 平面 $ABCD$ ；

(2) 求二面角 $B-QD-A$ 的平面角的余弦值。

【思路分析】(1) 取 AD 的中点为 O ，连接 QO ， CO ，可证 $QO \perp$ 平面 $ABCD$ ，从而得到面 $QAD \perp$ 面 $ABCD$ 。

(2) 在平面 $ABCD$ 内，过 O 作 $OT \parallel CD$ ，交 BC 于 T ，则 $OT \perp AD$ ，建如图所示的空间坐标系，求出平面 QAD 、平面 BQD 的法向量后可求二面角的余弦值。



【解析】:

(1) 取 AD 的中点为 O , 连接 QO, CO .

因为 $QA = QD$, $OA = OD$, 则 $QO \perp AD$,

而 $AD = 2, QA = \sqrt{5}$, 故 $QO = \sqrt{5-1} = 2$.

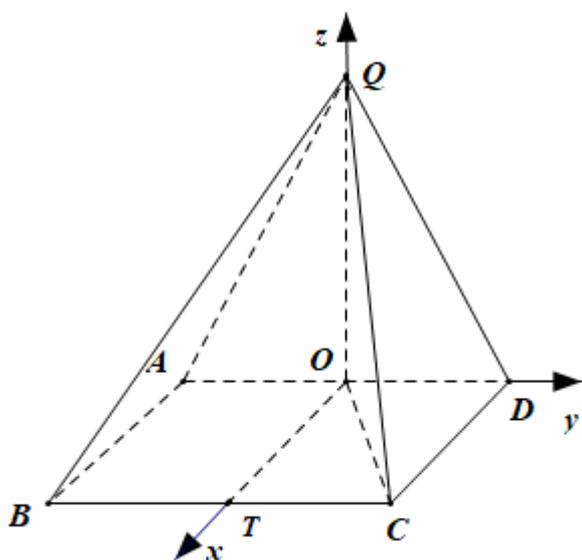
在正方形 $ABCD$ 中, 因为 $AD = 2$, 故 $DO = 1$, 故 $CO = \sqrt{5}$,

因为 $QC = 3$, 故 $QC^2 = QO^2 + OC^2$, 故 $\triangle QOC$ 为直角三角形且 $QO \perp OC$,

因为 $OC \cap AD = O$, 故 $QO \perp$ 平面 $ABCD$,

因为 $QO \subset$ 平面 QAD , 故平面 $QAD \perp$ 平面 $ABCD$.

(2) **解法一**: 在平面 $ABCD$ 内, 过 O 作 $OT \parallel CD$, 交 BC 于 T , 则 $OT \perp AD$, 结合 (1) 中的 $QO \perp$ 平面 $ABCD$, 故可建如图所示的空间坐标系.



则 $D(0,1,0), Q(0,0,2), B(2,-1,0)$, 故 $\overrightarrow{BQ} = (-2, 1, 2), \overrightarrow{BD} = (-2, 2, 0)$.

设平面 QBD 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BQ} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \end{cases} \text{即} \begin{cases} -2x + y + 2z = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases}, \text{取 } x = 1, \text{ 则 } y = 1, z = \frac{1}{2},$$

$$\text{故 } \vec{n} = \left(1, 1, \frac{1}{2} \right).$$

而平面 QAD 的法向量为 $\vec{m} = (1, 0, 0)$, 故 $\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{1}{1 \times \frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$.

二面角 $B-QD-A$ 的平面角为锐角, 故其余弦值为 $\frac{2}{3}$.

解法二: (浙江王海雷补解) 过 B 作 $BM \perp QD$ 于点 M

由 (1) 可知: 平面 $QAD \perp$ 平面 $ABCD$

$\therefore BA \perp AD$

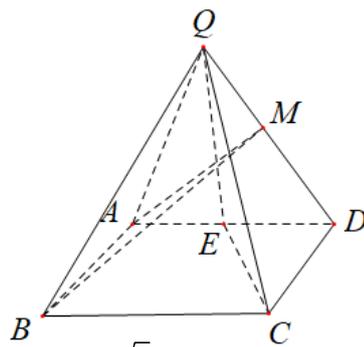
$\therefore BA \perp$ 面 QAD

在 $\triangle BQD$ 中, $BQ = \sqrt{QA^2 + AB^2} = 3, QD = \sqrt{5}, BD = 2\sqrt{2}$

$\cos \angle BQD = \frac{QB^2 + QD^2 - BD^2}{2 \times QB \times QD} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 即 $\sin \angle BQD = \frac{BM}{BQ} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 得: $BM = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

即 $\sin \angle BMA = \frac{BA}{BM} = \frac{\sqrt{5}}{3}, \cos \angle BMA = \frac{2}{3}$

即二面角 $B-QD-A$ 的平面角的余弦值为 $\frac{2}{3}$



20. 已知椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 右焦点为 $F(\sqrt{2}, 0)$, 且离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设 M, N 是椭圆 C 上的两点, 直线 MN 与曲线 $x^2 + y^2 = b^2 (x > 0)$ 相切. 证明: M, N, F 三点共线的充要条件是 $|MN| = \sqrt{3}$.

【思路分析】 (1) 由离心率公式可得 $a = \sqrt{3}$, 进而可得 b^2 , 即可得解;

(2) 必要性: 由三点共线及直线与圆相切可得直线方程, 联立直线与椭圆方程可证 $|MN| = \sqrt{3}$;

充分性: 设直线 $MN: y = kx + b, (kb < 0)$, 由直线与圆相切得 $b^2 = k^2 + 1$, 联立直线与椭圆方程结合弦长公式可得 $\sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{24k^2}}{1+3k^2} = \sqrt{3}$, 进而可得 $k = \pm 1$, 即可得解.

【解析】: (1) 由题意, 椭圆半焦距 $c = \sqrt{2}$ 且 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 所以 $a = \sqrt{3}$,

又 $b^2 = a^2 - c^2 = 1$, 所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$;

(2) 由 (1) 得, 曲线为 $x^2 + y^2 = 1 (x > 0)$,

当直线 MN 的斜率不存在时, 直线 $MN: x = 1$, 不合题意;

当直线 MN 的斜率存在时, 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

必要性:

若 M, N, F 三点共线, 可设直线 $MN: y = k(x - \sqrt{2})$ 即 $kx - y - \sqrt{2}k = 0$,

由直线 MN 与曲线 $x^2 + y^2 = 1 (x > 0)$ 相切可得 $\frac{|\sqrt{2}k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1$, 解得 $k = \pm 1$,

联立 $\begin{cases} y = \pm(x - \sqrt{2}) \\ \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \end{cases}$ 可得 $4x^2 - 6\sqrt{2}x + 3 = 0$, 所以 $x_1 + x_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}, x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{4}$,

$$\text{所以 } |MN| = \sqrt{1+1} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2} = \sqrt{3},$$

所以必要性成立;

充分性: 设直线 $MN: y = kx + b, (kb < 0)$ 即 $kx - y + b = 0$,

由直线 MN 与曲线 $x^2 + y^2 = 1 (x > 0)$ 相切可得 $\frac{|b|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$, 所以 $b^2 = k^2 + 1$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = kx + b \\ \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 可得 } (1+3k^2)x^2 + 6kbx + 3b^2 - 3 = 0,$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = -\frac{6kb}{1+3k^2}, x_1 \cdot x_2 = \frac{3b^2 - 3}{1+3k^2},$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } |MN| &= \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2} = \sqrt{1+k^2} \sqrt{\left(-\frac{6kb}{1+3k^2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{3b^2-3}{1+3k^2}} \\ &= \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{24k^2}}{1+3k^2} = \sqrt{3}, \end{aligned}$$

化简得 $3(k^2 - 1)^2 = 0$, 所以 $k = \pm 1$,

$$\text{所以 } \begin{cases} k=1 \\ b=-\sqrt{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} k=-1 \\ b=\sqrt{2} \end{cases}, \text{ 所以直线 } MN: y = x - \sqrt{2} \text{ 或 } y = -x + \sqrt{2},$$

所以直线 MN 过点 $F(\sqrt{2}, 0)$, M, N, F 三点共线, 充分性成立;

所以 M, N, F 三点共线的充要条件是 $|MN| = \sqrt{3}$.

【归纳总结】

解决本题的关键是直线方程与椭圆方程联立及韦达定理的应用, 注意运算的准确性是解题的重中之重.

21. 一种微生物群体可以经过自身繁殖不断生存下来, 设一个这种微生物为第 0 代, 经过一次繁殖后为第 1 代, 再经过一次繁殖后为第 2 代……, 该微生物每代繁殖的个数是相互独立的且有相同的分布列, 设 X 表示 1 个微生物个体繁殖下一代的个数, $P(X = i) = p_i (i = 0, 1, 2, 3)$.

(1) 已知 $p_0 = 0.4, p_1 = 0.3, p_2 = 0.2, p_3 = 0.1$, 求 $E(X)$;

(2) 设 p 表示该种微生物经过多代繁殖后临近灭绝的概率, p 是关于 x 的方程: $p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 = x$ 的一个最小正实根, 求证: 当 $E(X) \leq 1$ 时, $p = 1$, 当 $E(X) > 1$ 时, $p < 1$;

(3) 根据你的理解说明 (2) 问结论的实际含义.

【思路分析】(1) 利用公式计算可得 $E(X)$.

(2) 利用导数讨论函数的单调性, 结合 $f(1) = 0$ 及极值点的范围可得 $f(x)$ 的最小正零点.

(3) 利用期望的意义及根的范围可得相应的理解说明.

【解析】(1) $E(X) = 0 \times 0.4 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.1 = 1$.

(2) 设 $f(x) = p_3x^3 + p_2x^2 + (p_1 - 1)x + p_0$,

因为 $p_3 + p_2 + p_1 + p_0 = 1$, 故 $f(x) = p_3x^3 + p_2x^2 - (p_2 + p_0 + p_3)x + p_0$,

若 $E(X) \leq 1$, 则 $p_1 + 2p_2 + 3p_3 \leq 1$, 故 $p_2 + 2p_3 \leq p_0$.

$f'(x) = 3p_3x^2 + 2p_2x - (p_2 + p_0 + p_3)$,

因为 $f'(0) = -(p_2 + p_0 + p_3) < 0$, $f'(1) = p_2 + 2p_3 - p_0 \leq 0$,

故 $f'(x)$ 有两个不同零点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < 0 < 1 \leq x_2$,

且 $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$; $x \in (x_1, x_2)$ 时, $f'(x) < 0$;

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$, $(x_2, +\infty)$ 上为增函数, 在 (x_1, x_2) 上为减函数,

若 $x_2 = 1$, 因为 $f(x)$ 在 $(x_2, +\infty)$ 为增函数且 $f(1) = 0$,

而当 $x \in (0, x_2)$ 时, 因为 $f(x)$ 在 (x_1, x_2) 上为减函数, 故 $f(x) > f(x_2) = f(1) = 0$,

故 1 为 $p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 = x$ 的一个最小正实根,

若 $x_2 > 1$, 因为 $f(1) = 0$ 且在 $(0, x_2)$ 上为减函数, 故 1 为 $p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 = x$ 的一个最小正实根,

综上, 若 $E(X) \leq 1$, 则 $p = 1$.

若 $E(X) > 1$, 则 $p_1 + 2p_2 + 3p_3 > 1$, 故 $p_2 + 2p_3 > p_0$.

此时 $f'(0) = -(p_2 + p_0 + p_3) < 0$, $f'(1) = p_2 + 2p_3 - p_0 > 0$,

故 $f'(x)$ 有两个不同零点 x_3, x_4 , 且 $x_3 < 0 < x_4 < 1$,

且 $x \in (-\infty, x_3) \cup (x_4, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$; $x \in (x_3, x_4)$ 时, $f'(x) < 0$;

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_3)$, $(x_4, +\infty)$ 上为增函数, 在 (x_3, x_4) 上为减函数,

而 $f(1) = 0$, 故 $f(x_4) < 0$,

又 $f(0) = p_0 > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, x_4)$ 存在一个零点 p , 且 $p < 1$.

所以 p 为 $p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 = x$ 的一个最小正实根, 此时 $p < 1$,

故当 $E(X) > 1$ 时, $p < 1$.

(3) 意义: 每一个该种微生物繁殖后代的平均数不超过 1, 则若干代必然灭绝, 若繁殖后代的平均数超过 1, 则若干代后被灭绝的概率小于 1.

22. 已知函数 $f(x) = (x-1)e^x - ax^2 + b$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 从下面两个条件中选一个, 证明: $f(x)$ 有一个零点

① $\frac{1}{2} < a \leq \frac{e^2}{2}, b > 2a$;

② $0 < a < \frac{1}{2}, b \leq 2a$.

【思路分析】(1) 首先求得导函数的解析式, 然后分类讨论确定函数的单调性即可;

(2) 由题意结合(1)中函数的单调性和函数零点存在定理即可证得题中的结论.

【解析】: (1) 由函数的解析式可得: $f'(x) = x(e^x - 2a)$,

当 $a \leq 0$ 时, 若 $x \in (-\infty, 0)$, 则 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

若 $x \in (0, +\infty)$, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 若 $x \in (-\infty, \ln(2a))$, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

若 $x \in (\ln(2a), 0)$, 则 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

若 $x \in (0, +\infty)$, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 R 上单调递增;

当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 若 $x \in (-\infty, 0)$, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

若 $x \in (0, \ln(2a))$, 则 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

若 $x \in (\ln(2a), +\infty)$, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

(2)若选择条件①:

由于 $\frac{1}{2} < a \leq \frac{e^2}{2}$, 故 $1 < 2a \leq e^2$, 则 $b > 2a > 1$, $f(0) = b - 1 > 0$,

而 $f(-b) = (-1-b)e^{-b} - ab^2 - b < 0$,

而函数在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 故函数在区间 $(-\infty, 0)$ 上有一个零点.

$$f(\ln(2a)) = 2a[\ln(2a) - 1] - a[\ln(2a)]^2 + b$$

$$> 2a[\ln(2a) - 1] - a[\ln(2a)]^2 + 2a$$

$$= 2a \ln(2a) - a[\ln(2a)]^2$$

$$= a \ln(2a)[2 - \ln(2a)],$$

由于 $\frac{1}{2} < a \leq \frac{e^2}{2}$, $1 < 2a \leq e^2$, 故 $a \ln(2a)[2 - \ln(2a)] \geq 0$,

结合函数的单调性可知函数在区间 $(0, +\infty)$ 上没有零点.

综上所述, 题中的结论成立.

若选择条件②:

由于 $0 < a < \frac{1}{2}$, 故 $2a < 1$, 则 $f(0) = b - 1 \leq 2a - 1 < 0$,

当 $b \geq 0$ 时, $e^2 > 4$, $4a < 2$, $f(2) = e^2 - 4a + b > 0$,

而函数在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故函数在区间 $(0, +\infty)$ 上有一个零点.

当 $b < 0$ 时, 构造函数 $H(x) = e^x - x - 1$, 则 $H'(x) = e^x - 1$,

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $H'(x) < 0$, $H(x)$ 单调递减,

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $H'(x) > 0$, $H(x)$ 单调递增,

注意到 $H(0) = 0$, 故 $H(x) \geq 0$ 恒成立, 从而有: $e^x \geq x + 1$, 此时:

$$f(x) = (x-1)e^x - ax^2 - b \geq (x-1)(x+1) - ax^2 + b = (1-a)x^2 + (b-1),$$

当 $x > \sqrt{\frac{1-b}{1-a}}$ 时, $(1-a)x^2 + (b-1) > 0$,

取 $x_0 = \sqrt{\frac{1-b}{1-a}} + 1$, 则 $f(x_0) > 0$,

$$\text{即: } f(0) < 0, f\left(\sqrt{\frac{1-b}{1-a}} + 1\right) > 0,$$

而函数在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故函数在区间 $(0, +\infty)$ 上有一个零点.

$$f(\ln(2a)) = 2a[\ln(2a) - 1] - a[\ln(2a)]^2 + b$$

$$\leq 2a[\ln(2a) - 1] - a[\ln(2a)]^2 + 2a$$

$$= 2a \ln(2a) - a[\ln(2a)]^2$$

$$= a \ln(2a) [2 - \ln(2a)],$$

由于 $0 < a < \frac{1}{2}$, $0 < 2a < 1$, 故 $a \ln(2a) [2 - \ln(2a)] < 0$,

结合函数的单调性可知函数在区间 $(-\infty, 0)$ 上没有零点.

综上所述, 题中的结论成立.

【归纳总结】导数是研究函数的单调性、极值(最值)最有效的工具, 而函数是高中数学中重要的知识点, 所以在历届高考中, 对导数的应用的考查都非常突出, 对导数的应用的考查主要从以下几个角度进行: (1)考查导数的几何意义, 往往与解析几何、微积分相联系. (2)利用导数求函数的单调区间, 判断单调性; 已知单调性, 求参数. (3)利用导数求函数的最值(极值), 解决生活中的优化问题. (4)考查数形结合思想的应用.

《初高中数学教研微信系列群》简介:

目前有 15 个群 (13 个高中群, 2 个初中群), 共 5000 多优秀、特、高级教师, 省、市、区县教研员、教辅公司数学编辑、报刊杂志高中数学编辑等汇聚而成, 是一个围绕高中数学教学研究展开教研活动的微信群.

宗旨: 脚踏实地、不口号、不花哨、接地气的高中数学教研!

特别说明:

1. 本系列群只探讨高中数学教学研究、高中数学试题研究等相关话题;

2. 由于本群是集“研究—写作—发表(出版)”于一体的“桥梁”, 涉及业务合作, 特强调真诚交流, 入群后立即群名片:

教师格式: 省+市+真实姓名, 如: 四川成都张三

编辑格式: 公司或者刊物(简写)+真实姓名

欢迎各位老师邀请你身边热爱高中数学教研(不喜欢研究的谢绝)的教师好友(学生谢绝)加入, 大家共同研究, 共同提高!

群主二维码: 见右图

