

数学试题

2020. 5

第 I 卷（必做题，共 160 分）

一、填空题（本大题共 14 小题，每小题 5 分，共 70 分，请将答案填写在答题卷相应的位置上。）

1. 已知集合 $M = \{x | x^2 - 2x < 0\}$, $N = \{x | -1 < x < 1\}$, 则 M 与 N 的并集 $M \cup N =$ _____.

2. 设复数 $z = a + i$ ($a > 0$), 若 $\bar{z}z = 2$, 则正实数 a 的值为_____.

3. 某电视台对一节目的喜爱程度进行网络调查, 共有 12000 人参与调查, 喜爱、一般、不喜爱的人分别为 6000 人、5000 人、1000 人, 为进一步了解被调查人的具体想法, 现利用分层抽样的方法抽取 60 人, 则抽取不喜爱的人数为_____.

4. 某校志愿者小组有 2 名男生和 1 名女生, 现从中任选 2 人参加活动, 则女生入选的概率是_____.

5. 一个算法的伪代码如图所示, 执行此算法, 最后输出的 S 的值为_____.

```

I ← 1
While I < 6
    I ← I + 2
    S ← 2I - 1
End While
Print S

```

第 5 题

6. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$) 的离心率为 2, 则其两条渐近线所成的锐角为_____.

7. 设三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 V_1 , 点 M , N 分别满足 $\overrightarrow{PM} = 2\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{NC}$, 记三棱锥 $A-BMN$ 的体积为 V_2 , 则 $\frac{V_2}{V_1} =$ _____.

8. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A , B , C 所对的边分别为 a , b , c , 若 $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{b}{a+c}$, $a = 2c$, 则 $\cos A =$ _____.

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \log_2 a_n$, 且数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 若 $b_3 = 2$, $b_{10} = 9$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n =$ _____.

10. 若函数 $f(x) = |\sin(2x + \theta)|$ 关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称, 则 θ 的最小正值为_____.

11. 若存在实数 $x \in (0, 4)$, 使不等式 $x^3 - 2ax + 16 < 0$ 成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

12. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 已知 AH 是 BC 边上的高, 且满足 $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, 则 $\frac{AC}{AB}$ 的取值范围是_____.

13. 设函数 $f(x) = x^2 - 2ax + b \cdot 2^x$, 若函数 $y = f(x)$ 与函数 $y = f(f(x))$ 都有零点, 且它们的零点完全相同, 则实数 a 的取值范围是_____.

14. 若圆 $C_1: (x-m)^2 + y^2 = 16$ 与圆 $C_2: (x-n)^2 + y^2 = 16$ 相交, 点 P 为其在 x 轴下方的交点, 且 $mn = -8$, 则点 P 到直线 $x + y - 1 = 0$ 距离的最大值为_____.

二、解答题 (本大题共 6 小题, 共计 90 分, 请在答题纸指定区域内作答, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

15. (本小题满分 14 分)

若 $\vec{m} = (\sin \frac{x}{2}, \cos \frac{x}{2})$, $\vec{n} = (\cos \frac{x}{2}, \sqrt{3} \cos \frac{x}{2})$, 设 $f(x) = \vec{m} \cdot \vec{n} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的单调减区间;

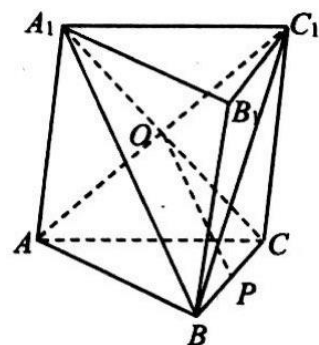
(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $f(A) = f(B)$, $a = 2b$, 求 $\sin B$ 的值.

16. (本小题满分 14 分)

如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 = AC$, $A_1B \perp AC_1$, 设 O 为 AC_1 与 A_1C 的交点, 点 P 为 BC 的中点. 求证:

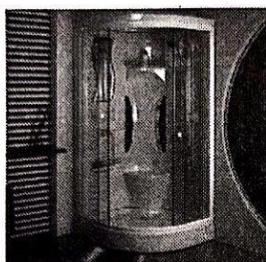
(1) $OP \parallel$ 平面 ABB_1A_1 ;

(2) 平面 $ACC_1 \perp$ 平面 OCP .

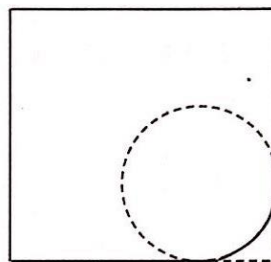


17. (本小题满分 14 分)

如图 1 是淋浴房示意图，它的底座是由正方形截去一角得到，这一角是一个与正方形两邻边相切的圆的 $\frac{1}{4}$ 圆弧 (如图 2). 现已知正方形的边长是 1 米，设该底座的面积为 S 平方米，周长为 l 米 (周长是指图 2 中实线部分)，圆的半径为 r 米. 设计的理想要求是面积 S 尽可能大，周长 l 尽可能小，但显然 S 、 l 都是关于 r 的减函数，于是设 $f(r) = \frac{S}{l}$ ，当 $f(r)$ 的值越大，满意度就越高. 试问 r 为何值时，该淋浴房底座的满意度最高? (解答时 π 以 3 代入运算)



(第 17 题图 1)

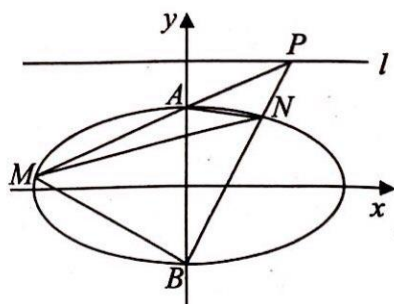


(第 17 题图 2)

18. (本小题满分 16 分)

如图，A、B 为椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ 短轴的上、下顶点，P 为直线 $l: y=2$ 上一动点，连接 PA 并延长交椭圆于点 M，连接 PB 交椭圆于点 N，已知直线 MA，MB 的斜率之积恒为 $-\frac{1}{2}$ 。

- (1) 求椭圆 C 的标准方程；
- (2) 若直线 MN 与 x 轴平行，求直线 MN 的方程；
- (3) 求四边形 AMBN 面积的最大值，并求对应的点 P 的坐标。



19. (本小题满分 16 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_{n+1} - a_n| = 2n + 1$ 。

- (1) 若数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ，其中 $0 < a_1 < 3$ ，且 a_1, a_2, a_3 构成公比小于 0 的等比数列，求 a_1 的值；
- (2) 若 a_n 是公差为 $d(d > 0)$ 的等差数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，求 a_1 的值；
- (3) 若 $a_1 = 1, a_2 = -2$ ，且数列 $\{a_{2n-1}\}$ 单调递增，数列 $\{a_{2n}\}$ 单调递减，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

20. (本小题满分 16 分)

设函数 $f(x) = \frac{\varphi(x)}{e^x}$, $g(x) = \frac{\ln x}{\varphi(x)}$, 其中 $\varphi(x)$ 恒不为 0.

(1) 设 $\varphi(x) = x^2$, 求函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程;

(2) 若 x_0 是函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公共极值点, 求证: x_0 存在且唯一;

(3) 设 $\varphi(x) = ax + b$, 是否存在实数 a, b , 使得 $f'(x) \cdot g'(x) < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立? 若存在, 请求出实数 a, b 满足的条件; 若不存在, 请说明理由.

第 II 卷 (附加题, 共 40 分)

21. 【选做题】本题包括 A, B, C 三小题, 请选定其中两题作答, 每小题 10 分共计 20 分, 解答时应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

A. 选修 4—2: 矩阵与变换

直线 l 经矩阵 $M = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ (其中 $\theta \in (0, \pi)$) 作用变换后得到直线 $l': y = 2x$,

若直线 l 与 l' 垂直, 求 θ 的值.

B. 选修 4—4: 坐标系与参数方程

已知在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = -\frac{1}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$
 以坐标原点

为极点, 以 x 轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = \sqrt{2}$, 求直线 l 被曲线 C 截得的弦长.

C. 选修 4—5: 不等式选讲

若正数 a, b, c 满足 $2a + 4b + c = 3$, 求 $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+3}$ 的最小值.

【必做题】第 22 题、第 23 题，每题 10 分，共计 20 分，解答时应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

22. (本小题满分 10 分)

已知某高校综合评价有两步：第一步是材料初审，若材料初审不合格，则不能进入第二步面试；若材料初审合格，则进入第二步面试. 只有面试合格者，才能获得该高校综合评价的录取资格，现有 A, B, C 三名学生报名参加该高校的综合评价，假设 A, B, C 三位学

生材料初审合格的概率分别是 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ ；面试合格的概率分别是 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$.

(1) 求 A, B 两位考生有且只有一位考生获得录取资格的概率；

(2) 记随机变量 X 为 A, B, C 三位学生获得该高校综合评价录取资格的人数，求 X 的概率分布与数学期望.

23. (本小题满分 10 分)

设集合 $T_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ (其中 $n \geq 3, n \in \mathbf{N}^*$), 将 T_n 的所有 3 元子集 (含有 3 个元素的子集) 中的最小元素的和记为 S_n .

(1) 求 S_3, S_4, S_5 的值;

(2) 试求 S_n 的表达式.

江苏省盐城市 2020 届高三年级第三次模拟考试数学试题解析

第 I 卷 (必做题, 共 160 分)

一、填空题（本大题共 14 小题，每小题 5 分，共 70 分，请将答案填写在答题卷相应的位置上.）

1. 已知集合 $M = \{x | x^2 - 2x < 0\}$, $N = \{x | -1 < x < 1\}$, 则 M 与 N 的并集 $M \cup N =$ _____.

答案: $(-1, 2)$

考点: 集合并集运算

解析: $\because$ 集合 $M = \{x | x^2 - 2x < 0\}$,

$$\therefore M = (0, 2), \text{ 又 } \because N = \{x | -1 < x < 1\}, \therefore M \cup N = (-1, 2)$$

2. 设复数 $z = a + i$ ($a > 0$), 若 $\bar{z}z = 2$, 则正实数 a 的值为_____.

答案: 1

考点: 复数

解析: $\because z = a + i$,

$$\therefore \bar{z}z = (a - i)(a + i) = a^2 + 1 = 2,$$

$$\text{又 } \because a > 0, \therefore a = 1.$$

3. 某电视台对一节目的喜爱程度进行网络调查, 共有 12000 人参与调查, 喜爱、一般、不喜爱的人分别为 6000 人、5000 人、1000 人, 为进一步了解被调查人的具体想法, 现利用分层抽样的方法抽取 60 人, 则抽取不喜爱的人数为_____.

答案: 5

考点: 分层抽样

$$\text{解析: } \frac{60}{12000} \times 1000 = 5.$$

4. 某校志愿者小组有 2 名男生和 1 名女生, 现从中任选 2 人参加活动, 则女生入选的概率是_____.

$$\text{答案: } \frac{2}{3}$$

考点: 随机事件的概率

解析: 3 人中任选两人有三种情况, 其中女生入选的情况有 2 种, 故女生入选的概率是 $\frac{2}{3}$.

5. 一个算法的伪代码如图所示, 执行此算法, 最后输出的 S 的值为_____.

```
I ← 1
While I < 6
    I ← I + 2
    S ← 2I - 1
End While
Print S
```

答案: 13

考点: 伪代码

解析: 第一步: $I=3, S=5$;

第一步: $I=5, S=9$;

第一步: $I=7, S=13$; 此时 $I>6$, 输出 S 的值为 13.

6. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的离心率为 2, 则其两条渐近线所成的锐角为_____.

答案: $\frac{\pi}{3}$

考点: 双曲线的简单性质

解析: $\because \frac{c}{a} = 2, \therefore \frac{c^2}{a^2} = 4$, 故 $\frac{a^2+b^2}{a^2} = 4, \frac{b}{a} = \sqrt{3}$,

$\therefore$ 两条渐近线方程为: $y = \pm\sqrt{3}x$,

$\therefore$ 两条渐近线所成的锐角为 $\frac{\pi}{3}$.

7. 设三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 V_1 , 点 M, N 分别满足 $\overrightarrow{PM} = 2\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{NC}$, 记三棱

锥 $A-BMN$ 的体积为 V_2 , 则 $\frac{V_2}{V_1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案: $\frac{1}{6}$

考点: 三棱锥的体积

解析: 首先得 $S_{\triangle BMN} = \frac{1}{6} S_{\triangle PBC}$, 且点 A 到平面 BMN 与点 A 到平面 PBC 的距离相等,

故 $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{6}$.

8. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{b}{a+c}, a=2c$, 则 $\cos A$

$= \underline{\hspace{2cm}}$.

答案: $\frac{\sqrt{6}}{4}$

考点: 正余弦定理

解析: $\because \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{b}{a+c}, \therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{a+c}$, 把 $a=2c$ 代入得, $b=\sqrt{6}c$,

$$\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{6c^2 + c^2 - 4c^2}{2\sqrt{6}cc} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \log_2 a_n$, 且数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 若 $b_3 = 2$, $b_{10} = 9$,

则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n =$ _____.

答案: $2^n - 1$

考点: 等差数列的通项公式, 等比数列的前 n 项和

解析: $\because \{b_n\}$ 是等差数列, 且 $b_3 = 2$, $b_{10} = 9$, $\therefore b_n = n - 1$,

$$\therefore a_n = 2^{n-1}, \text{ 故 } \{a_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } S_n = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1.$$

10. 若函数 $f(x) = |\sin(2x + \theta)|$ 关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称, 则 θ 的最小正值为_____.

答案: $\frac{\pi}{2}$

考点: 三角函数的对称性

解析: 由题意得, $2 \times \frac{\pi}{4} + \theta = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$,

$$\text{则 } \theta = -\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \text{ 所以 } \theta \text{ 的最小正值为 } \frac{\pi}{2}.$$

11. 若存在实数 $x \in (0, 4)$, 使不等式 $x^3 - 2ax + 16 < 0$ 成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

答案: $(6, +\infty)$

考点: 函数与不等式 (存在性问题)

解析: $\because \exists x \in (0, 4)$, 是不等式 $x^3 - 2ax + 16 < 0$ 成立,

$$\therefore 2a > (x^2 + \frac{16}{x})_{\min},$$

$$\text{令 } f(x) = x^2 + \frac{16}{x}, \text{ 则 } f'(x) = \frac{2(x^3 - 8)}{x^2},$$

当 $x \in (0, 2)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in (2, 4)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

故 $f(x)_{\min} = f(2) = 12$, $2a > 12$, 故 $a > 6$.

12. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 已知 AH 是 BC 边上的高, 且满足 $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, 则 $\frac{AC}{AB}$ 的取值范围是_____.

答案: $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$

考点: 平面向量与解三角形

解析: 由题意知 $AH \perp BC$, 且 $CH = \frac{1}{3}BC$,

在 $Rt\triangle ACH$ 中, $\cos C = \frac{CH}{AC} = \frac{\frac{a}{3}}{b} = \frac{a}{3b}$, 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$,

所以 $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a}{3b}$, 化简得 $a^2 = 3c^2 - 3b^2 > 0$, 得 $\frac{b}{c} < 1$,

$\because \triangle ABC$ 是锐角三角形, $\therefore b^2 + c^2 > a^2 = 3c^2 - 3b^2$, 得 $\frac{b}{c} > \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{b}{c} < 1$, 即 $\frac{AC}{AB}$ 的取值范围是 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$.

13. 设函数 $f(x) = x^2 - 2ax + b \cdot 2^x$, 若函数 $y = f(x)$ 与函数 $y = f(f(x))$ 都有零点, 且它们的零点完全相同, 则实数 a 的取值范围是_____.

答案: $(-2, 0]$

考点: 函数与方程

解析: 假设 x_0 既是 $y = f(x)$ 的零点, 也是 $y = f(f(x))$ 的零点,

则 $f(x_0) = 0$, $f(f(x_0)) = 0$, 即 $f(0) = 0$, 则 $b = 0$, $\therefore f(x) = x^2 - 2ax$,

令 $f(x) = 0$, 解得 $x_1 = 0$, $x_2 = 2a$,

$\therefore f(f(x)) = 0$, 解得 $f(x) = 0$ 或 $f(x) = 2a$,

①当 $a = 0$ 时, 符合题意;

②当 $a \neq 0$ 时, 方程 $f(x) = 2a$ 无解, 即方程 $x^2 - 2ax - 2a = 0$ 无解,

$$\therefore 4a^2 - 4(-2a) < 0, \text{ 解得 } -2 < a < 0,$$

综上所述, $-2 < a \leq 0$.

14. 若圆 $C_1: (x-m)^2 + y^2 = 16$ 与圆 $C_2: (x-n)^2 + y^2 = 16$ 相交, 点 P 为其在 x 轴下方的交点, 且 $mn = -8$, 则点 P 到直线 $x+y-1=0$ 距离的最大值为_____.

答案: $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

考点: 直线与圆综合

解析: 由题意可知 $x_p = \frac{m+n}{2}$,

$$\text{代入圆 } C_1 \text{ 得 } y_p = -\sqrt{16 - \frac{(m-n)^2}{4}} = -\sqrt{16 - \frac{(m+n)^2 - 4mn}{4}},$$

$$\because mn = -8, \therefore y_p = -\sqrt{16 - \frac{(m+n)^2 - 4 \times (-8)}{4}} = -\sqrt{8 - \left(\frac{m+n}{2}\right)^2},$$

所以点 P 在圆 $x^2 + y^2 = 8$ 上, 其中 $y < 0$,

求得圆心 O 到直线 $x+y-1=0$ 的距离是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

故点 P 到直线 $x+y-1=0$ 的距离的最大值是 $2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

二、解答题 (本大题共 6 小题, 共计 90 分, 请在答题纸指定区域内作答, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

15. (本小题满分 14 分)

$$\text{若 } \vec{m} = \left(\sin \frac{x}{2}, \cos \frac{x}{2}\right), \vec{n} = \left(\cos \frac{x}{2}, \sqrt{3} \cos \frac{x}{2}\right), \text{ 设 } f(x) = \vec{m} \cdot \vec{n} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(1) 求函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的单调减区间;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $f(A) = f(B)$, $a = 2b$,

求 $\sin B$ 的值.

$$\text{解: (1) } \because \vec{m} = \left(\sin \frac{x}{2}, \cos \frac{x}{2}\right), \vec{n} = \left(\cos \frac{x}{2}, \sqrt{3} \cos \frac{x}{2}\right),$$

$$\begin{aligned}
\therefore f(x) &= \vec{m} \cdot \vec{n} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \sqrt{3} \cos^2 \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{1}{2} \sin x + \sqrt{3} \frac{1 + \cos x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \\
&= \sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3} \\
&= \sin(x + \frac{\pi}{3})
\end{aligned}$$

$$\text{由 } \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{解得 } \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{又 } \because x \in [0, \pi], \therefore \text{解得 } \frac{\pi}{6} \leq x \leq \pi,$$

$$\therefore \text{函数 } f(x) \text{ 在 } [0, \pi] \text{ 的单调减区间为 } [\frac{\pi}{6}, \pi],$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3}), \text{ 其对称轴为 } x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{当 } x \in [0, \pi], \text{ 对称轴方程为 } x = \frac{\pi}{6},$$

$$\because f(A) = f(B), \quad a = 2b, \text{ 即 } A > B,$$

$$\therefore A + B = \frac{\pi}{3}, \quad \sin A = 2 \sin B, \quad \therefore \sin(\frac{\pi}{3} - B) = 2 \sin B$$

$$\sin \frac{\pi}{3} \cos B - \cos \frac{\pi}{3} \sin B = 2 \sin B, \quad \therefore \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B - \frac{1}{2} \sin B = 2 \sin B,$$

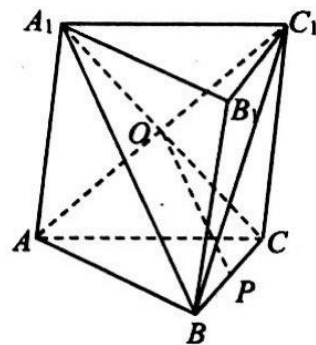
$$\text{即 } \cos B = \frac{5}{\sqrt{3}} \sin B, \quad \because \sin^2 B + \cos^2 B = 1, \text{ 且 } B \text{ 为锐角, } \sin B > 0$$

$$\text{解得 } \sin B = \frac{\sqrt{21}}{14}.$$

16. (本小题满分 14 分)

如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1=AC$, $A_1B \perp AC_1$, 设 O 为 AC_1 与 A_1C 的交点, 点 P 为 BC 的中点. 求证:

- (1) $OP \parallel$ 平面 ABB_1A_1 ;
- (2) 平面 $ACC_1 \perp$ 平面 OCP .



解: (1) $\because$ 在三棱柱中, 平面 ACC_1A_1 是平行四边形,

$\therefore O$ 为 A_1C 的中点, 又 $\because P$ 为 BC 的中点,

$\therefore OP \parallel A_1B$,

$\because A_1B \subset$ 平面 ABB_1A_1 , $OP \not\subset$ 平面 ABB_1A_1 ,

$\therefore OP \parallel$ 平面 ABB_1A_1 ,

(2) $\because$ 平面 ACC_1A_1 是平行四边形, 且 $AA_1=AC$,

$\therefore$ 平面 ACC_1A_1 是菱形,

$\therefore AC_1 \perp A_1C$, 即 $AC_1 \perp OC$,

$\because A_1B \perp AC_1$, 且 $OP \parallel A_1B$,

$\therefore AC_1 \perp OP$, 又 $AC_1 \perp OC$, $OP \cap OC = O$,

$\therefore AC_1 \perp$ 平面 OCP ,

$\because AC_1 \subset$ 平面 ACC_1 ,

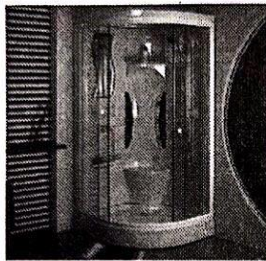
$\therefore$ 平面 $ACC_1 \perp$ 平面 OCP .

17. (本小题满分 14 分)

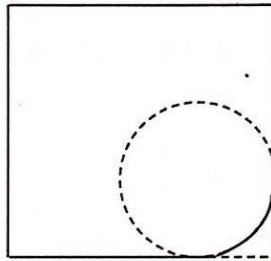
如图 1 是淋浴房示意图, 它的底座是由正方形截去一角得到, 这一角是一个与正方形两邻边相切的圆的 $\frac{1}{4}$ 圆弧 (如图 2). 现已知正方形的边长是 1 米, 设该底座的面积为 S 平方米, 周长为 l 米 (周长是指图 2 中实线部分), 圆的半径为 r 米. 设计的理想要求是面积 S

尽可能大, 周长 l 尽可能小, 但显然 S 、 l 都是关于 r 的减函数, 于是设 $f(r) = \frac{S}{l}$, 当 $f(r)$

的值越大, 满意度就越高. 试问 r 为何值时, 该淋浴房底座的满意度最高? (解答时 π 以 3 代入运算)



(第 17 题图 1)



(第 17 题图 2)

解: $l = 4 - 2r + \frac{\pi r}{2} = 4 - \frac{4 - \pi}{2}r = 4 - \frac{r}{2},$

$$S = 1 - (r^2 - \frac{\pi r^2}{4}) = 1 - \frac{4 - \pi}{4}r^2 = 1 - \frac{r^2}{4},$$

所以 $f(r) = \frac{1 - \frac{r^2}{4}}{4 - \frac{r}{2}} = \frac{4 - r^2}{16 - 2r}, r \in (0, 1],$

$$f'(r) = \frac{r^2 - 16r + 4}{2(r - 8)^2}, \text{ 令 } f'(r) = 0, \text{ 解得 } r = 8 - 2\sqrt{5} \in (0, 1]$$

r	$(0, 8 - 2\sqrt{5})$	$8 - 2\sqrt{5}$	$(8 - 2\sqrt{5}, 1)$
$f'(r)$	+	0	-
$f(r)$	递增	极大值	递减

故 $r = 8 - 2\sqrt{5}$ 时, $f(r)$ 取得最大值.

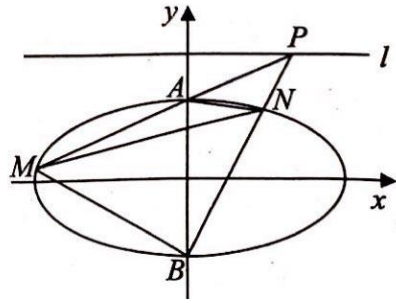
答: 当 $r = 8 - 2\sqrt{5}$ 时, 该淋浴房底座的满意度最高.

18. (本小题满分 16 分)

如图, A、B 为椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ 短轴的上、下顶点, P 为直线 $l: y = 2$ 上一动点,

连接 PA 并延长交椭圆于点 M, 连接 PB 交椭圆于点 N, 已知直线 MA, MB 的斜率之积恒为 $-\frac{1}{2}$.

- (1) 求椭圆 C 的标准方程;
- (2) 若直线 MN 与 x 轴平行, 求直线 MN 的方程;
- (3) 求四边形 AMBN 面积的最大值, 并求对应的点 P 的坐标.



解: (1) $A(0, 1)$, $B(0, -1)$, 设 $M(x, y)$, 则 $y^2 = 1 - \frac{x^2}{a^2}$

$$k_{MA} \cdot k_{MB} = \frac{(y-1)(y+1)}{x^2} = \frac{y^2-1}{x^2} = -\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{2}, \quad a^2 = 2$$

因此, 椭圆 C 的标准方程为: $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$;

(2) 设 $M(m, n)$, 则 $N(-m, n)$, $m \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$

$$\begin{cases} AM: x = \frac{m}{n-1}(y-1) \\ BN: x = \frac{-m}{n+1}(y+1) \end{cases} \Rightarrow y_p = \frac{1}{n} = 2 \Rightarrow n = \frac{1}{2}, \text{ 故直线 MN 的方程为: } y = \frac{1}{2};$$

(3) 设 $P(t, 2)$, $t \neq 0$

$$\begin{cases} AP: y = \frac{1}{t}x + 1 \\ x^2 + 2y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = \frac{-4t}{t^2+2} \\ y = \frac{t^2+2}{t^2+2} \end{cases} \Rightarrow M(\frac{-4t}{t^2+2}, \frac{t^2+2}{t^2+2})$$

$$\begin{cases} BP: y = \frac{3}{t}x - 1 \\ x^2 + 2y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = \frac{12t}{t^2+18} \\ y = \frac{-t^2+18}{t^2+18} \end{cases} \Rightarrow N(\frac{12t}{t^2+18}, \frac{-t^2+18}{t^2+18})$$

$$S_{\text{四边形}AMBN} = \frac{1}{2} AB \cdot \left(\left| \frac{-4}{t^2+2} \right| + \left| \frac{12}{t^2+18} \right| \right) = \left| \frac{t4}{t^2+2} + \frac{12}{t^2+18} \right| = 1 \left| \frac{t + \frac{6}{t}}{t^2 + \frac{36}{t^2} + 20} \right|$$

$$\text{令 } \left| t + \frac{6}{t} \right| = x \in [2\sqrt{6}, +\infty), \text{ 则 } S_{\text{四边形}AMBN} = f(x) = \frac{16x}{x^2+8}, \quad x \in [2\sqrt{6}, +\infty)$$

$$f'(x) = \frac{16(8-x^2)}{(x^2+8)^2} < 0, \text{ 故 } f(x) \text{ 在 } [2\sqrt{6}, +\infty) \text{ 上递减,}$$

$$\text{故 } x = 2\sqrt{6}, \text{ 即 } t = \frac{6}{t}, \text{ 即 } t = \pm\sqrt{6} \text{ 时, } f(x)_{\max} = \sqrt{6},$$

即 $S_{\text{四边形} AMBN}$ 的最大值为 $\sqrt{6}$

因此, 四边形 $AMBN$ 面积的最大值为 $\sqrt{6}$, 对应的点 P 的坐标为 $(\pm\sqrt{6}, 2)$.

19. (本小题满分 16 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_{n+1} - a_n| = 2n + 1$.

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 其中 $0 < a_1 < 3$, 且 a_1, a_2, a_3 构成公比小于 0 的等比数列, 求 a_1 的值;

(2) 若 a_n 是公差为 $d(d > 0)$ 的等差数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求 a_1 的值;

(3) 若 $a_1 = 1, a_2 = -2$, 且数列 $\{a_{2n-1}\}$ 单调递增, 数列 $\{a_{2n}\}$ 单调递减, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

$$\text{解: (1) 由题意知: } \begin{cases} a_2 - a_1 = -3 \\ a_3 - a_2 = 5 \\ a_2^2 = a_1 a_3 \end{cases} \Rightarrow a_1 = \frac{9}{8};$$

(2) 由题意知: $b_1 = a_1, b_n = a_1 + (n-1)d$

$$|a_{n+1} - a_n| = |b_{n+1}| = |a_1 + dn| = 2n + 1 \text{ 对任意 } n \in N^* \text{ 均成立, 其中 } d > 0,$$

$$\begin{cases} |d + a_1| = 3 \\ |2d + a_1| = 5 \\ |3d + a_1| = 7 \\ d > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases}$$

此时, $|a_{n+1} - a_n| = |b_{n+1}| = |a_1 + dn| = 2n + 1$ 对任意 $n \in N^*$ 均成立, 故 $a_1 = 1$;

(3) 由题意知: $a_1 = 1 < a_3 < a_5 < \dots < a_{2n-1} < \dots, a_2 = -2 > a_4 > a_6 > \dots > a_{2n} > \dots$

$$\text{故 } n = 2k - 1 \text{ 时, } |a_{n+1} - a_n| = a_n - a_{n+1} = a_{2k-1} - a_{2k} = 4k - 1$$

$$n = 2k \text{ 时, } |a_{n+1} - a_n| = a_{2k+1} - a_{2k} = 4k + 1$$

则: $a_{2k+1} - a_{2k-1} = 2$,

故 $a_{2k-1} = a_1 + (a_3 - a_1) + (a_5 - a_3) + \cdots + (a_{2k-1} - a_{2k-3}) = 2k - 1$

即 n 为奇数时, $a_n = n$, 又 n 为奇数时, $a_n - a_{n+1} = 2n + 1 \Rightarrow a_{n+1} = -n - 1$

即 n 为偶数时, $a_n = -n$

综上, $a_n = (-1)^{n-1} \cdot n$.

20. (本小题满分 16 分)

设函数 $f(x) = \frac{\varphi(x)}{e^x}$, $g(x) = \frac{\ln x}{\varphi(x)}$, 其中 $\varphi(x)$ 恒不为 0.

(1) 设 $\varphi(x) = x^2$, 求函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程;

(2) 若 x_0 是函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公共极值点, 求证: x_0 存在且唯一;

(3) 设 $\varphi(x) = ax + b$, 是否存在实数 a, b , 使得 $f'(x) \cdot g'(x) < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立? 若存在, 请求出实数 a, b 满足的条件; 若不存在, 请说明理由.

解: (1) $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$, $f(1) = \frac{1}{e}$, $f'(x) = \frac{2x - x^2}{e^x}$, $f'(1) = \frac{1}{e}$

故在 $x=1$ 处的切线方程为: $x - ey = 0$;

(2) $f'(x) = \frac{\varphi'(x) - \varphi(x)}{e^x}$, $g'(x) = \frac{\frac{\varphi(x)}{x} - \varphi'(x) \ln x}{\varphi^2(x)}$

由题意知 $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ g'(x_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 \ln x_0 - 1 = 0$:

令 $h(x) = x \ln x - 1$, $x > 0$, $h'(x) = \ln x + 1$

$x \in (0, e^{-1})$ 时, $h'(x) < 0$; $x \in (e^{-1}, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$

故 $h(x)$ 在 $(0, e^{-1})$ 递减, $(e^{-1}, +\infty)$ 递增

又 $x \in (0, 1)$ 时, $h(x) < -1$, 故 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上无零点

$h(1) = -1 < 0$, $h(e) = e - 1 > 0$, 故 $h(1)g(e) < 0$

又 $h(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 递增, 因此, $h(x)$ 在 $(1, e)$ 上存在唯一零点

$\therefore x_0$ 存在且唯一;

(3) 由题意知: $\varphi(x) = ax + b$ 在 $(0, +\infty)$ 上无零点

当 $a=0$ 时, 则 $b \neq 0$, $f'(x)g'(x) = \frac{-b}{e^x} \cdot \frac{1}{bx} = -\frac{1}{xe^x} < 0$, 符合题意;

又 $f'(1)g'(1) = \frac{-b}{e} \cdot \frac{1}{a+b} < 0$, 则 $b(a+b) > 0$, 故 $b \neq 0$

当 $a \neq 0$ 时, 要使 $\varphi(x) = ax + b$ 在 $(0, +\infty)$ 上无零点, 显然 $ab > 0$

$$f'(x)g'(x) = \frac{a - ax - b}{e^x} \cdot \frac{a + \frac{b}{x} - a \ln x}{(ax + b)^2} < 0 \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上恒成立}$$

即 $(ax + b - a)(a \ln x - \frac{b}{x} - a) < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立

令 $F(x) = ax + b - a$, $x \in (0, +\infty)$, $G(x) = a \ln x - \frac{b}{x} - a$, $x \in (0, +\infty)$

① $a, b > 0$ 时, $x > \max\{0, 1 - \frac{b}{a}\}$ 时, $F(x) > 0$

$x > \max\{b, e^{\frac{1}{1+\frac{1}{a}}}\}$ 时, $a \ln x - a > 1$, $-\frac{b}{x} > -1$, 故 $G(x) > 0$

因此, $x > \max\{1 - \frac{b}{a}, b, e^{\frac{1}{1+\frac{1}{a}}}\}$ 时, $F(x)G(x) > 0$

与题意不符, 舍去;

② $a, b < 0$ 时, $x > \max\{0, 1 - \frac{b}{a}\}$ 时, $F(x) < 0$

$x > \max\{-b, e^{\frac{1}{1-\frac{1}{a}}}\}$ 时, $a \ln x - a < -1$, $-\frac{b}{x} < 1$, 故 $G(x) < 0$

因此, $x > \max\{1 - \frac{b}{a}, -b, e^{\frac{1}{1-\frac{1}{a}}}\}$ 时, $F(x)G(x) > 0$

与题意不符, 舍去;

综上, 存在 $a=0$, $b \neq 0$ 符合题意.

第 II 卷 (附加题, 共 40 分)

21. 【选做题】本题包括 A, B, C 三小题, 请选定其中两题作答, 每小题 10 分共计 20 分, 解答时应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

A. 选修 4—2: 矩阵与变换

直线 l 经矩阵 $M = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ (其中 $\theta \in (0, \pi)$) 作用变换后得到直线 $l': y=2x$,

若直线 l 与 l' 垂直, 求 θ 的值.

解: 在 l 上任取一点 $P(x, y)$, 设 P 经矩阵 M 变换后得到点 $P'(x', y')$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cdot x - \sin \theta \cdot y \\ \sin \theta \cdot x + \cos \theta \cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\text{故} \begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}, \text{又 } P' \text{ 在直线 } l': y=2x \text{ 上, 即 } y'=2x'$$

$$\text{则 } x \sin \theta + y \cos \theta = 2x \cos \theta - 2y \sin \theta$$

$$\text{即直线 } l: (\sin \theta - 2 \cos \theta)x + (2 \sin \theta + \cos \theta)y = 0$$

$$\text{因为 } l \text{ 与 } l' \text{ 垂直, 故 } \frac{\sin \theta - 2 \cos \theta}{2 \sin \theta + \cos \theta} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \theta = 0$$

$$\text{又 } \theta \in (0, \pi), \text{ 故 } \theta = \frac{\pi}{2}.$$

B. 选修 4—4: 坐标系与参数方程

$$\text{已知在直角坐标系 } xOy \text{ 中, 直线 } l \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = -\frac{1}{2}t \end{cases} (t \text{ 为参数}). \text{ 以坐标原点}$$

为极点, 以 x 轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = \sqrt{2}$, 求直线 l 被曲线 C 截得的弦长.

解: 直线 l 的直角坐标方程为: $x + \sqrt{3}y + 1 = 0$,

曲线 C 的直角坐标方程为: $x^2 + y^2 = 2$, 圆心为 $C(0, 0)$, 半径 $r = \sqrt{2}$,

$$\text{圆心 } C \text{ 到直线 } l \text{ 的距离 } d = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{所以直线 } l \text{ 被曲线 } C \text{ 截得的弦长为 } 2\sqrt{(\sqrt{2})^2 - (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{7}.$$

C. 选修 4—5: 不等式选讲

若正数 a, b, c 满足 $2a + 4b + c = 3$, 求 $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+3}$ 的最小值.

解: 因为正数 a, b, c 满足 $2a + 4b + c = 3$, 所以 $2(a+1) + 4(b+2) + (c+3) = 16$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+3} &= \frac{1}{16} [2(a+1) + 4(b+2) + (c+3)] \cdot \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+3} \right), \\ &\geq \frac{1}{16} (\sqrt{2} + 2 + 1)^2 = \frac{11 + 6\sqrt{2}}{16} \end{aligned}$$

$$\text{当且仅当 } a = \frac{24\sqrt{2} - 23}{7}, b = \frac{10 - 8\sqrt{2}}{7}, c = \frac{27 - 16\sqrt{2}}{7} \text{ 时, 取最小值 } \frac{11 + 6\sqrt{2}}{16}.$$

【必做题】第 22 题、第 23 题, 每题 10 分, 共计 20 分, 解答时应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

22. (本小题满分 10 分)

已知某高校综合评价有两步: 第一步是材料初审, 若材料初审不合格, 则不能进入第二步面试; 若材料初审合格, 则进入第二步面试. 只有面试合格者, 才能获得该高校综合评价的录取资格, 现有 A, B, C 三名学生报名参加该高校的综合评价, 假设 A, B, C 三位学

生材料初审合格的概率分别是 $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$; 面试合格的概率分别是 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$.

(1) 求 A, B 两位考生有且只有一位考生获得录取资格的概率;

(2) 记随机变量 X 为 A, B, C 三位学生获得该高校综合评价录取资格的人数, 求 X 的概率分布与数学期望.

解: (1) 记 “A, B 两位考生有且只有一位考生获得录取资格” 为事件 M

$$\text{A 考生获得录取资格的概率为 } \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}; \text{ B 考生获得录取资格的概率为 } \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6};$$

$$\text{所以 } P(M) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{18}$$

答：A，B 两位考生有且只有一位考生获得录取资格的概率为 $\frac{5}{18}$ ；

(2) 随机变量 X 可能的取值为：0，1，2，3

C 考生获得录取资格的概率为 $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$ ，由 (1) 得 A，B 两位考生获得录取资格

的概率均为 $\frac{1}{6}$ ，

所以 A，B，C 三位考生获得高校综合评价录取资格的人数 $X \sim B(3, \frac{1}{6})$ ，

$$\text{则 } P(X=0) = C_3^0 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}, \quad P(X=1) = C_3^1 \left(\frac{5}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{75}{216},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \left(\frac{5}{6}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{15}{216}, \quad P(X=3) = C_3^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216},$$

随机变量 X 的概率分布表如下：

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

数学期望为：

$$E(X) = 0 \times \frac{125}{216} + 1 \times \frac{75}{216} + 2 \times \frac{15}{216} + 3 \times \frac{1}{216} = \frac{1}{2} \quad (\text{人})$$

答：X 的数学期望为 $\frac{1}{2}$ 人。

23. (本小题满分 10 分)

设集合 $T_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ (其中 $n \geq 3, n \in \mathbb{N}^*$)，将 T_n 的所有 3 元子集 (含有 3 个元素的子集) 中的最小元素的和记为 S_n 。

(1) 求 S_3, S_4, S_5 的值；

(2) 试求 S_n 的表达式。

解：(1) $T_3 = \{1, 2, 3\}$ ，其所有三元子集为 $\{1, 2, 3\}$ ，故 $S_3 = 1$ ；

$T_4 = \{1, 2, 3, 4\}$, 其所有三元子集为 $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$, 故 $S_4 = 5$;

$T_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, , 其所有三元子集为 $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 3, 4\}$,

$\{1, 3, 5\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$, $\{3, 4, 5\}$, 故 $S_5 = 15$;

(2) $T_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 的所有三元子集中:

最小元素为 1 的三元子集个数为 C_{n-1}^2

最小元素为 2 的三元子集个数为 C_{n-2}^2

最小元素为 3 的三元子集个数为 C_{n-3}^2

.....

最小元素为 $n-2$ 的三元子集个数为 C_2^2

$$S_n = (n-2)C_2^2 + (n-3)C_3^2 + (n-4)C_4^2 + \dots + 3C_{n-3}^2 + 2C_{n-2}^2 + C_{n-1}^2$$

$$= C_2^2 + (n-3)(C_3^3 + C_3^2) + (n-4)C_4^2 + \dots + 3C_{n-3}^2 + 2C_{n-2}^2 + C_{n-1}^2$$

$$= C_2^2 + (n-3)C_4^3 + (n-4)C_4^2 + \dots + 3C_{n-3}^2 + 2C_{n-2}^2 + C_{n-1}^2$$

$$= C_2^2 + C_4^3 + (n-4)(C_4^3 + C_4^2) + \dots + 3C_{n-3}^2 + 2C_{n-2}^2 + C_{n-1}^2$$

$$= C_2^2 + C_4^3 + (n-4)C_5^3 + \dots + 3C_{n-3}^2 + 2C_{n-2}^2 + C_{n-1}^2$$

.....

$$= C_4^4 + C_4^3 + C_5^3 + \dots + C_n^3$$

$$= C_5^4 + C_5^3 + \dots + C_n^3$$

$$= C_{n+1}^4.$$