

## 不等关系

天不均匀地不平，风云变幻大江东。

入水光路改方向，露珠圆圆看晶莹。

选优汰劣费思量，极大极小造化功。

从头细说不等式，抽丝剥茧乐融融。

不等关系与相等关系都是客观事物的基本数量关系，是数学研究的重要内容。

本章将研究和处理不等关系，探求生产生活中一些问题的最佳方案。

### 【教学·建构】

#### 探究 1

(1) 某博物馆的门票每位 10 元，20 人以上(含 20 人)的团体票 8 折优惠. 那么不足 20 人时, 应该选择怎样的购票策略?

(2) 某杂志以每本 2 元的价格发行时, 发行量为 10 万册. 经过调查, 若价格每提高 0.2 元, 发行量就减少 5 000 册. 要使杂志社的销售收入大于 22.4 万元, 每本杂志的价格应定在怎样的范围内?

(3) 下表给出了 X, Y, Z 三种食物的维生素含量及成本:

	维生素 A (单位/kg)	维生素 B (单位/kg)	成 本 (元/kg)
X	300	700	5
Y	500	100	4
Z	300	300	3

某人欲将这三种食物混合成 100 kg 的食品, 要使混合食品中至少含 35 000 单位的维生素 A 及 40 000 单位的维生素 B, 设 X, Y 这两种食物各取  $x$  kg,  $y$  kg, 那么  $x, y$  应满足怎样的关系?

试用相应的不等式模型刻画上述问题.

探究 2 已知  $b$  g 糖水中有  $a$  g 糖 ( $b > a > 0$ ), 若再添加  $m$  g 糖 ( $m > 0$ ), 则糖水变得更甜. 试根

据这个事实写出  $a, b, m$  所满足的不等关系. (这个不等式就是著名的糖水不等式)

思考 该不等式迄今为止给出了 32 种证明方法, 请你至少给出 2 种方法?

**探究3** 一般的人，下半身长  $x$  与全身长  $y$  的比值  $\frac{x}{y}$  在  $0.57 \sim 0.6$  之间，而芭蕾舞演员在表演时，脚

尖立起给人以美的享受. 原来，脚尖立起调整了身段的比例. 如果设人的脚尖立起提高了  $m$ ，则下半身与

全身的长度比由  $\frac{x}{y}$  变成了  $\frac{x+m}{y+m}$ ，这样比值就非常接近黄金分割值（golden section） $0.618$ . 女士们追求美

而穿高跟鞋，有些男士穿增高鞋，其目的之一就是在追求这个比值. 用来解释这种现象的数学关系是：

$$0.58 \approx \frac{x}{y} < \frac{x+m}{y+m} \approx 0.618.$$

**探究4** 甲、乙两人同时从  $A$  地出发沿同一条路线走到  $B$  地，所用时间分别为  $t_1, t_2$ ，甲有一半时间以速度  $m$  行走，另一半时间以速度  $n$  行走；乙有一半路程以速度  $m$  行走，另一半路程以速度  $n$  行走，且  $m \neq n$ .

(1) 请你与同学各自计算  $t_1, t_2$  (用  $m, n$  表示)；(2) 与同学一起比较  $t_1, t_2$  的大小，并判断甲、乙谁先到达  $B$  地.

**变式** 甲、乙两人同去一家粮店买了两次粮食，两次粮食的价格不同，两人的购粮方式也不同，其中，甲每次买  $1000 \text{ kg}$ ，乙每次买  $1000$  元.

(1) 求两人的购粮均价；(2) 谁的购粮方式更合算？

**【练习·反馈·提升】**

1. 设点  $A$  到直线  $l$  的距离为  $d$ ,  $C$  为直线  $l$  上的任意一点, 试用不等式表示  $d$  和  $AC$  的大小关系.

2. 一个车辆制造厂引进了一条摩托车整车装配流水线, 这条流水线生产的摩托车数量  $x$  (辆) 与创造的价值  $y$  (元) 之间有如下的关系:  $y = -2x^2 + 220x$ . 若这家工厂希望在一个星期内利用这条流水线创收 6000 元以上, 那么它在一个星期内大约应该生产多少辆摩托车? 设在一个星期内大约生产  $x$  辆摩托车, 请根据情境列出不等关系.

3. 某钢铁厂要把长度为 4000mm 的钢管截成 500mm 和 600mm 两种. 按照生产的要求, 600mm 钢管的数量不能超过 500mm 钢管的 3 倍. 假设截得 500mm 的钢管有  $x$  根, 截得 600mm 的钢管有  $y$  根, 请根据情境列出不等关系.

4. 周长为 1 的正方形和圆, 哪个图形的面积更大?

5. 解不等式  $\sin x > \frac{1}{2}$ .

**【复习·思考】** 整理笔记, 巩固记忆课堂教学内容.