2020-2021学年第一学期高三年级期末考试

数学（理）试题参考答案及评分建议

一．选择题：1.B　2.D　3.A　4.C　5.A　6. B　7.B　8.C　9.A　10.D　11.D　12.A

二．填空题：13. -80　　14. 9　　15. 5或$\dfrac{5}{4}$　　16. $2+\cos 2$

三．解答题：17.解：（1）当$n=1$时，$a_1=S_1=1$；　　………1分

当$n>1$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$；

$\therefore a_n=2n-1(n\in N^*)$）；　　………3分

$\therefore b_1=a_1=1$，$b_3=a_5=9$，$\therefore$数列$\{b_n\}$的公比$q=3$，$\therefore b_n=3^{n-1}(n\in N^*)$；……6分

（2）由（1）可得$c_n=a_n\cdot b_n=(2n-1)\cdot 3^{n-1}(n\in N^*)$，　　………7分

$\therefore T_n=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{n-1}+c_n=1\times1+3\times3+5\times3^2+\cdots+(2n-3)\times3^{n-2}+(2n-1)\times3^{n-1}$，①

$3T_n=1\times3+3\times3^2+5\times3^3+\cdots+(2n-3)\times3^{n-1}+(2n-1)\times3^n$，②　　…………9分

①-②，整理得$T_n=(n-1)\times3^n+1(n\in N^*)$．　　…………12分

18．解：（1）$\because a^2+b^2-c^2-ab=0$，$\therefore a^2+b^2-c^2=ab$，

由余弦定理得$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{ab}{2ab}=\dfrac{1}{2}$，$\because 0°<C<180°$，$\therefore C=60°$，　………2分

$\because \sin(A-B)+\sin C=\sin A\cos B-\cos A\sin B+\sin(A+B)$

$=\sin A\cos B-\cos A\sin B+\sin A\cos B+\cos A\sin B=2\sin A\cos B$，

$\therefore 2\sin A\cos B=2\cos A\cos B$，$\therefore(\sin A-\cos A)\cos B=0$，　　…………4分

①当$\cos B=0$时，$B=90°$，$A=30°$；

②当$\sin A-\cos A=0$时，$A=45°$，$B=75°$；　　…………6分

（2）由（1）得当$B=90°$，$A=30°$时，

$\because a=2$，$\therefore c=2\sqrt{3}$，$\therefore S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=2\sqrt{3}$；　　…………8分

当$A=45°$，$B=75°$时，由正弦定理得$\dfrac{2}{\sin 45°}=\dfrac{b}{\sin 75°}$，$\therefore b=\dfrac{2\sin 75°}{\sin 45°}=\sqrt{3}+1$，

$\therefore S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$．　　…………12分

19.解（1）由题意得3月4日新增病例中有12名男性，8名女性，按性别从中分层抽取5人，其中有3名男性，2名女性，　　…………2分

$\therefore$ 这 2 人至少有 1 名女性的概率 $P=\dfrac{C_2^1C_3^1+C_2^2}{C_5^2}=\dfrac{7}{10}=0.7$； ············4 分

（2）由题意得 ξ 所有可能的取值分别为 2, 3, 4, 5, 6， ············5 分

$P(\xi=2)=\dfrac{60}{120}\times\dfrac{60}{120}=\dfrac{1}{4}$，$P(\xi=3)=\dfrac{60}{120}\times\dfrac{40}{120}\times2=\dfrac{1}{3}$，

$P(\xi=4)=\dfrac{60}{120}\times\dfrac{20}{120}\times2+\dfrac{40}{120}\times\dfrac{40}{120}=\dfrac{5}{18}$，$P(\xi=5)=\dfrac{40}{120}\times\dfrac{20}{120}\times2=\dfrac{1}{9}$，

$P(\xi=6)=\dfrac{20}{120}\times\dfrac{20}{120}=\dfrac{1}{36}$，

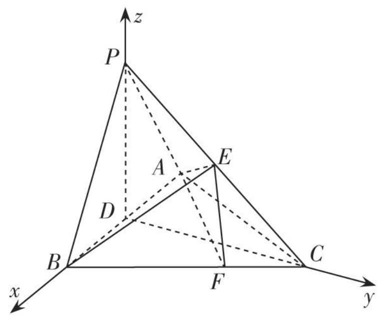
$\therefore \xi$ 的分布列为

ξ	2	3	4	5	6
P	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{5}{18}$	$\dfrac{1}{9}$	$\dfrac{1}{36}$

············10 分

$\therefore E\xi=2\times\dfrac{1}{4}+3\times\dfrac{1}{3}+4\times\dfrac{5}{18}+5\times\dfrac{1}{9}+6\times\dfrac{1}{36}=\dfrac{10}{3}$. ············12 分

20.（1）证明：连接 CD，



$\because PA=PB=\sqrt{2}$，$AB=2$，D 为 AB 的中点，

$\therefore PD\perp AB$，$PD=1$， ············2 分

同理可得 $CD\perp AB$，$CD=2$，

$\because PC^2=PD^2+CD^2=5$，$\therefore PD\perp CD$， ············4 分

$\because AB\cap CD=D$，$\therefore PD\perp$ 平面 ABC；

$\because PD\subset$ 平面 PAB，$\therefore$ 平面 $PAB\perp$ 平面 ABC； ············6 分

（2）以 D 为坐标原点，向量 $\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DP}$ 的方向为 x，y，z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$，由题意得 $D(0,0,0)$，$A(-1,0,0)$，$C(0,2,0)$，$P(0,0,1)$，$B(1,0,0)$，$E(0,1,\dfrac{1}{2})$，$\because \overrightarrow{BF}=\lambda\overrightarrow{FC}$，$\therefore \overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=(\dfrac{\lambda+2}{1+\lambda},\dfrac{2\lambda}{1+\lambda},0)$，

设 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$ 是平面 ACE 的一个法向量，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x_1+y_1+\dfrac{1}{2}z_1=0,\\ x_1+2y_1=0,\end{cases}$ 令 $y_1=-1$，则 $\begin{cases}x_1=2,\\ z_1=-2,\end{cases}$ $\therefore \vec{m}=(2,-1,-2)$， ······8 分

设 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$ 是平面 AEF 的一个法向量，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x_2+y_2+\dfrac{1}{2}z_2=0,\\ \dfrac{\lambda+2}{1+\lambda}x_2+\dfrac{2\lambda}{1+\lambda}y_2=0,\end{cases}$

令 $y_2=-(\lambda+2)$，则 $\begin{cases}x_2=2\lambda,\\ z_2=4-2\lambda,\end{cases}$ $\therefore \vec{n}=(2\lambda,-\lambda-2,4-2\lambda)$， …………10 分

$\because$ 二面角 $A-DF-P$ 的大小为 $45°$，

$\therefore \cos 45°=\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{3\lambda-2}{\sqrt{9\lambda^2-12\lambda+20}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore \lambda=2$ 或 $\lambda=-\dfrac{2}{3}$（舍去）． …………12 分

21. 解：(1) 由题意得 $f'(x)=-(x+2)(ae^x-2)$，$x\in R$， …………2 分

①当 $a<0$ 时，令 $f'(x)<0$，则 $x<-2$，$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上递减；

令 $f'(x)>0$，则 $x>-2$，$\therefore f(x)$ 在 $(-2,+\infty)$ 上递增；

②当 $0<a<2e^2$ 时，则 $\ln\dfrac{2}{a}>-2$，

令 $f'(x)<0$，则 $x<-2$ 或 $x>\ln\dfrac{2}{a}$，$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 和 $(\ln\dfrac{2}{a},+\infty)$ 上递减；

令 $f'(x)>0$，则 $-2<x<\ln\dfrac{2}{a}$，$\therefore f(x)$ 在 $(-2,\ln\dfrac{2}{a})$ 上递增；

③当 $a=2e^2$ 时，则 $f'(x)=-2(x+2)(e^{x+2}-1)\le 0$，$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上递减；

④当 $a>2e^2$ 时，则 $\ln\dfrac{2}{a}<-2$，

令 $f'(x)<0$，则 $x<\ln\dfrac{2}{a}$ 或 $x>-2$，$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,\ln\dfrac{2}{a})$ 和 $(-2,+\infty)$ 上递减；

令 $f'(x)>0$，则 $\ln\dfrac{2}{a}<x<-2$，$\therefore f(x)$ 在 $(\ln\dfrac{2}{a},-2)$ 上递增； …………6 分

(2) 由题意得 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-m>0$ 在 $(0,1]$ 恒成立，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,1]$ 上递增，$\therefore g(x)\le g(1)=1$，

$\therefore$ 存在 $m\in(-1,1)$ 使得 $1<m^2+4m-ae^m(m+1)$ 成立，即 $a<\dfrac{m^2+4m-1}{e^m(m+1)}$ 成立，……9 分

令 $h(m)=\dfrac{m^2+4m-1}{e^m(m+1)}$，$m\in(-1,1)$，则 $h'(m)=-\dfrac{(m+3)(m+2)(m-1)}{e^m(m+1)^2}>0$，

$\therefore h(m)$ 在 $(-1,1)$ 上递增，$\therefore a<h(1)=\dfrac{2}{e}$，

$\therefore$ 实数 a 的取值范围为 $(-\infty,0)\cup(0,\dfrac{2}{e})$． …………12 分

22. 解：（1）将 $\begin{cases} x=t^2+\dfrac{1}{t^2}-2, \\ y=t-\dfrac{1}{t} \end{cases}$ 的参数 t 消去得曲线 C_1 的普通方程为 $y^2=x$，……3 分

$\because \rho\cos(\theta+\dfrac{\pi}{4})=\sqrt{2}$，$\therefore \rho\cos\theta-\rho\sin\theta-2=0$，

由 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$ 可得曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x-y-2=0$；…………5 分

（2）将曲线 C_1 与 C_2 的方程联立得 $\begin{cases} x-y-2=0, \\ y^2=x, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=4, \\ y=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1, \\ y=-1, \end{cases}$ $\therefore P$ 的直角坐标为 $(1,-1)$ 或 $(4,2)$；…………7 分

设所求圆的圆心坐标为 $(a,0)(a>0)$，则其方程为 $x^2-2ax+y^2=0$，

当 P 的坐标为 $(4,2)$ 时，$\therefore a=\dfrac{5}{2}$，则所求圆的极坐标方程为 $\rho=5\cos\theta$；

当 P 的坐标为 $(1,-1)$ 时，$\therefore a=1$，则所求圆的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$. ………10 分

23. 证明：（1）由题意得 $a^2+b^2\geq 2ab$，$b^2+c^2\geq 2bc$，$c^2+a^2\geq 2ca$，………3 分

$\because a,b,c$ 是三个不全相等的实数，$\therefore$ 上述三个不等式的等号不全成立，

$\therefore 2(a^2+b^2+c^2)>2(ab+bc+ca)$，即 $a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$；…………5 分

（2）由（1）得 $a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$，

$\therefore (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ …………7 分

$<3(a^2+b^2+c^2)=3$，

$\therefore a+b+c<\sqrt{3}$. …………10 分

注：以上各题其它解法，请酌情给分.