



§ 9.8 曲线与方程

复习讲义

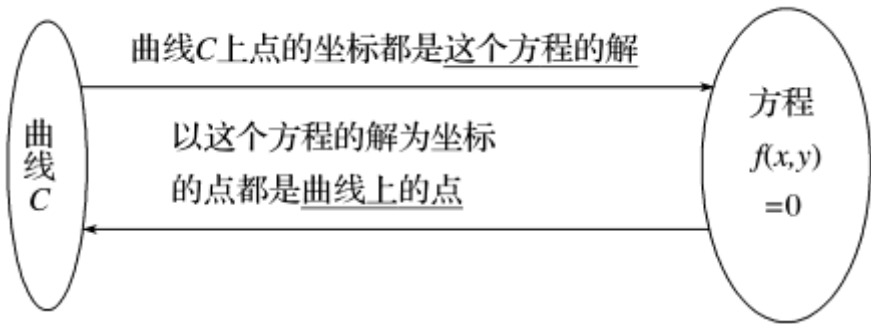
基础知识 自主学习

编制：高中数学教师群 274712379

1 知识梳理

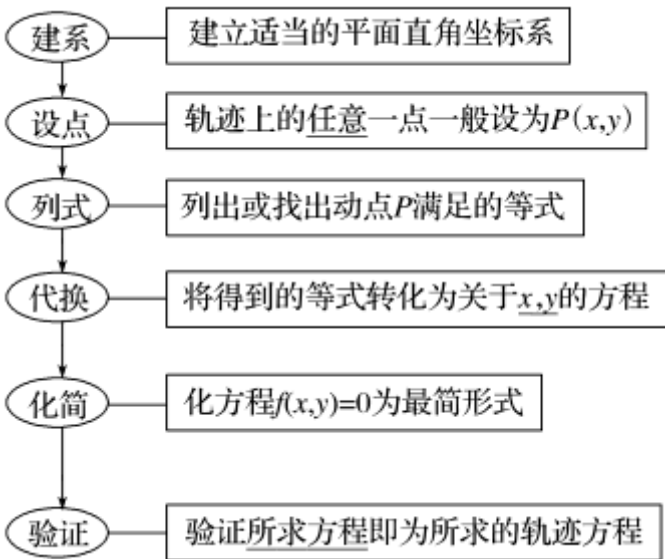
1. 曲线与方程的定义

一般地，在直角坐标系中，如果某曲线 C 上的点与一个二元方程 $f(x, y)=0$ 的实数解建立如下的对应关系：



那么，这个方程叫做曲线的方程，这条曲线叫做方程的曲线。

2. 求动点的轨迹方程的基本步骤



【知识拓展】

1. “曲线 C 是方程 $f(x, y)=0$ 的曲线”是“曲线 C 上的点的坐标都是方程 $f(x, y)=0$ 的解”的充分不必要条件。

2. 曲线的交点与方程组的关系：

(1)两条曲线交点的坐标是两个曲线方程的公共解，即两个曲线方程组成的方程组的实数解；

(2)方程组有几组解，两条曲线就有几个交点；方程组无解，两条曲线就没有交点。

【思考辨析】

判断下列结论是否正确(请在括号中打“√”或“×”)

(1) $f(x_0, y_0)=0$ 是点 $P(x_0, y_0)$ 在曲线 $f(x, y)=0$ 上的充要条件. (√)

(2)方程 $x^2+xy=x$ 的曲线是一个点和一条直线. (×)

(3)到两条互相垂直的直线距离相等的点的轨迹方程是 $x^2=y^2$. (×)

(4)方程 $y=\sqrt{x}$ 与 $x=y^2$ 表示同一曲线. (×)

(5) $y=kx$ 与 $x=\frac{1}{k}y$ 表示同一直线. (×)

2 考点自测

1. (教材改编)已知点 $F(\frac{1}{4}, 0)$ ，直线 $l: x=-\frac{1}{4}$ ，点 B 是 l 上的动点，若过点 B 垂直于 y 轴的直线与线段 BF 的垂直平分线交于点 M ，则点 M 的轨迹是()

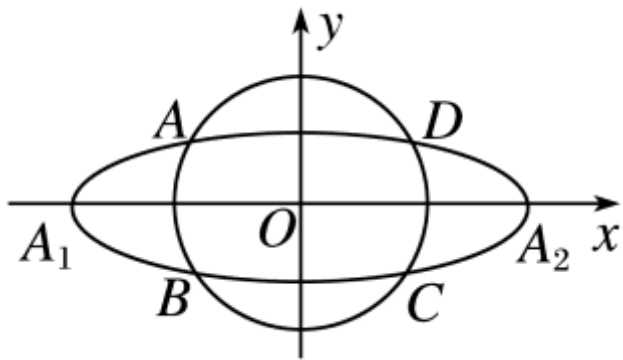
A. 双曲线

B. 椭圆

C. 圆

D. 抛物线

例 1 如图，动圆 $C_1: x^2+y^2=t^2, 1<t<3$ ，与椭圆 $C_2: \frac{x^2}{9}+y^2=1$ 相交于 A, B, C, D 四点．点 A_1, A_2 分别为 C_2 的左，右顶点．求直线 AA_1 与直线 A_2B 交点 M 的轨迹方程．



解 由椭圆 $C_2: \frac{x^2}{9}+y^2=1$ ，知 $A_1(-3,0), A_2(3,0)$ ．

设点 A 的坐标为 (x_0, y_0) ；由曲线的对称性，

得 $B(x_0, -y_0)$ ，

设点 M 的坐标为 (x, y) ，

直线 AA_1 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0+3}(x+3)$ ． ①

直线 A_2B 的方程为 $y=\frac{-y_0}{x_0-3}(x-3)$ ． ②

由①②得 $y^2=\frac{-y_0^2}{x_0^2-9}(x^2-9)$ ． ③

又点 $A(x_0, y_0)$ 在椭圆 C_2 上，故 $y_0^2=1-\frac{x_0^2}{9}$ ．④

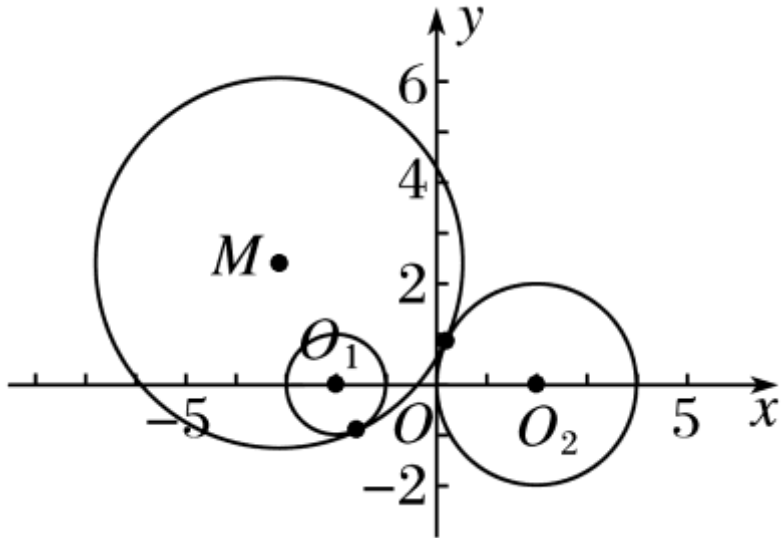
将④代入③得 $\frac{x^2}{9}-y^2=1(x<-3, y<0)$ ．

因此点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{9}-y^2=1(x<-3, y<0)$ ．

思维升华 应用定义法求曲线方程的关键在于由已知条件推出关于动点的等量关系式，由等量关系结合曲线定义判断是何种曲线，再设出标准方程，用待定系数法求解．

跟踪训练 1 已知两个定圆 O_1 和 O_2 ，它们的半径分别是 1 和 2，且 $|O_1O_2|=4$ ．动圆 M 与圆 O_1 内切，又与圆 O_2 外切，建立适当的坐标系，求动圆圆心 M 的轨迹方程，并说明轨迹是何种曲线．

解 如图所示，



以 O_1O_2 的中点 O 为原点， O_1O_2 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系．

由 $|O_1O_2|=4$ ，得 $O_1(-2,0), O_2(2,0)$ ．设动圆 M 的半径为 r ，则由动圆 M 与圆 O_1 内切，有 $|MO_1|=r-1$ ；

由动圆 M 与圆 O_2 外切，有 $|MO_2|=r+2$ ．

$\therefore |MO_2|-|MO_1|=3=4=|O_1O_2|$ ．

$\therefore$ 点 M 的轨迹是以 O_1, O_2 为焦点，实轴长为 3 的双曲线的左支． $\therefore a=\frac{3}{2}, c=2, \therefore b^2=c^2-a^2=\frac{7}{4}$ ．

$\therefore$ 点 M 的轨迹方程为 $\frac{4x^2}{9}-\frac{4y^2}{7}=1(x\leqslant-\frac{3}{2})$ ．

题型二 直接法求轨迹方程

例 2 (2019·广州模拟)已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个焦点为 $(\sqrt{5}, 0)$ ，离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ．

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)若动点 $P(x_0, y_0)$ 为椭圆 C 外一点, 且点 P 到椭圆 C 的两条切线相互垂直, 求点 P 的轨迹方程.

解 (1)依题意得, $c=\sqrt{5}$, $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$,

因此 $a=3$, $b^2=a^2-c^2=4$,

故椭圆 C 的标准方程是 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)若两切线的斜率均存在, 设过点 $P(x_0, y_0)$ 的切线方程是 $y=k(x-x_0)+y_0$,

则由 $\begin{cases} y=k(x-x_0)+y_0, \\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1, \end{cases}$

得 $\frac{x^2}{9}+\frac{[k(x-x_0)+y_0]^2}{4}=1$,

即 $(9k^2+4)x^2+18k(y_0-kx_0)x+9[(y_0-kx_0)^2-4]=0$,

$\Delta=[18k(y_0-kx_0)]^2-36(9k^2+4)[(y_0-kx_0)^2-4]=0$,

整理得 $(x_0^2-9)k^2-2x_0y_0k+y_0^2-4=0$.

又所引的两条切线相互垂直,

设两切线的斜率分别为 k_1, k_2 ,

于是有 $k_1k_2=-1$, 即 $\frac{y_0^2-4}{x_0^2-9}=-1$,

即 $x_0^2+y_0^2=13(x_0\neq\pm3)$.

若两切线中有一条斜率不存在,

则易得 $\begin{cases} x_0=3, \\ y_0=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_0=-3, \\ y_0=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_0=3, \\ y_0=-2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_0=-3, \\ y_0=-2 \end{cases}$,

经检验知均满足 $x_0^2+y_0^2=13$.

因此, 动点 $P(x_0, y_0)$ 的轨迹方程是 $x^2+y^2=13$.

思维升华 直接法求曲线方程时最关键的就是把几何条件或等量关系翻译为代数方程, 要注意翻译的等价性. 通常将步骤简记为建系设点、列式、代换、化简、证明这五个步骤, 但最后的证明可以省略, 如果给出了直角坐标系则可省去建系这一步, 求出曲线的方程后还需注意检验方程的纯粹性和完备性.

跟踪训练 2 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $P(a, b)$ 为动点, F_1, F_2 分别为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左, 右焦点. 已知 $\triangle F_1PF_2$ 为等腰三角形.

(1)求椭圆的离心率 e ;

(2)设直线 PF_2 与椭圆相交于 A, B 两点, M 是直线 PF_2 上的点, 满足 $\vec{AM}\vec{BM}=-2$, 求点 M 的轨迹方程.

解 (1)设 $F_1(-c,0), F_2(c,0)(c>0)$.

由题意, 可得 $|PF_2|=|F_1F_2|$, 即 $\sqrt{(a-c)^2+b^2}=2c$,

整理得 $2\left(\frac{c}{a}\right)^2+\frac{c}{a}-1=0$,

得 $\frac{c}{a}=-1$ (舍去) 或 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$. 所以 $e=\frac{1}{2}$.

(2)由(1)知 $a=2c, b=\sqrt{3}c$, 可得椭圆方程为 $3x^2+4y^2=12c^2$, 直线 PF_2 的方程为 $y=\sqrt{3}(x-c)$.

A, B 两点的坐标满足方程组 $\begin{cases} 3x^2+4y^2=12c^2, \\ y=\sqrt{3}(x-c). \end{cases}$

消去 y 并整理, 得 $5x^2-8cx=0$.

解得 $x_1=0, x_2=\frac{8}{5}c$,

得方程组的解 $\begin{cases} x_1=0, \\ y_1=-\sqrt{3}c, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=\frac{8}{5}c, \\ y_2=\frac{3\sqrt{3}}{5}c. \end{cases}$

不妨设 $A\left(\frac{8}{5}c, \frac{3\sqrt{3}}{5}c\right), B(0, -\sqrt{3}c)$.

设点 M 的坐标为 (x, y) ,

则 $\vec{AM}=\left(x-\frac{8}{5}c, y-\frac{3\sqrt{3}}{5}c\right), \vec{BM}=(x, y+\sqrt{3}c)$.

由 $y=\sqrt{3}(x-c)$, 得 $c=x-\frac{\sqrt{3}}{3}y$.

于是 $\vec{AM} = \left(\frac{8\sqrt{3}}{15}y - \frac{3}{5}x, \frac{8}{5}y - \frac{3\sqrt{3}}{5}x \right)$, $\vec{BM} = (x, \sqrt{3}x)$, 由 $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = -2$,

$$\text{即} \left(\frac{8\sqrt{3}}{15}y - \frac{3}{5}x \right) x + \left(\frac{8}{5}y - \frac{3\sqrt{3}}{5}x \right) \sqrt{3}x = -2.$$

$$\text{化简得 } 18x^2 - 16\sqrt{3}xy - 15 = 0.$$

$$\text{将 } y = \frac{18x^2 - 15}{16\sqrt{3}x} \text{ 代入 } c = x - \frac{\sqrt{3}}{3}y,$$

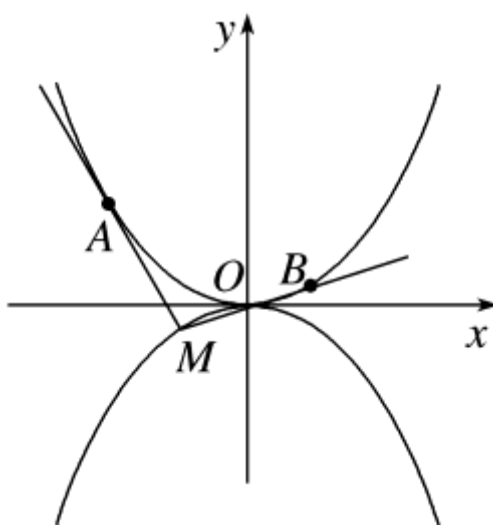
$$\text{得 } c = \frac{10x^2 + 5}{16x} > 0.$$

所以 $x > 0$.

因此, 点 M 的轨迹方程是 $18x^2 - 16\sqrt{3}xy - 15 = 0 (x > 0)$.

题型三 相关点法求轨迹方程

例 3 (2019·大连模拟) 如图所示, 抛物线 $C_1: x^2 = 4y$, $C_2: x^2 = -2py (p > 0)$. 点 $M(x_0, y_0)$ 在抛物线 C_2 上, 过 M 作 C_1 的切线, 切点为 A , B (M 为原点 O 时, A, B 重合于 O). 当 $x_0 = 1 - \sqrt{2}$ 时, 切线 MA 的斜率为 $-\frac{1}{2}$.



(1) 求 p 的值;

(2) 当 M 在 C_2 上运动时, 求线段 AB 中点 N 的轨迹方程 (A, B 重合于 O 时, 中点为 O).

解 (1) 因为抛物线 $C_1: x^2 = 4y$ 上任意一点 (x, y) 的切线斜率为 $y' = \frac{x}{2}$,

且切线 MA 的斜率为 $-\frac{1}{2}$,

所以点 A 的坐标为 $(-1, \frac{1}{4})$,

故切线 MA 的方程为 $y = -\frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{4}$.

因为点 $M(1 - \sqrt{2}, y_0)$ 在切线 MA 及抛物线 C_2 上,

$$\text{所以 } y_0 = -\frac{1}{2} \times (2 - \sqrt{2}) + \frac{1}{4}$$

$$= -\frac{3 - 2\sqrt{2}}{4}, \quad \text{①}$$

$$y_0 = -\frac{(1 - \sqrt{2})^2}{2p} = -\frac{3 - 2\sqrt{2}}{2p}. \quad \text{②}$$

由①②得 $p = 2$.

(2) 设 $N(x, y)$, $A(x_1, \frac{x_1^2}{4})$, $B(x_2, \frac{x_2^2}{4})$, $x_1 \neq x_2$.

由 N 为线段 AB 的中点, 知

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \text{③}$$

$$y = \frac{x_1^2 + x_2^2}{8}. \quad \text{④}$$

所以切线 MA , MB 的方程分别为

$$y = \frac{x_1}{2}(x - x_1) + \frac{x_1^2}{4}, \quad \text{⑤}$$

$$y = \frac{x_2}{2}(x - x_2) + \frac{x_2^2}{4}. \quad \text{⑥}$$

由⑤⑥得 MA , MB 的交点 $M(x_0, y_0)$ 的坐标为

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{x_1 x_2}{4}.$$

因为点 $M(x_0, y_0)$ 在 C_2 上, 即 $x_0^2 = -4y_0$,

所以 $x_1x_2 = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{6}$. ⑦

由③④⑦得 $x^2 = \frac{4}{3}y$, $x \neq 0$.

当 $x_1 = x_2$ 时, A, B 重合于原点 O ,

AB 的中点 N 为点 O , 坐标满足 $x^2 = \frac{4}{3}y$.

因此 AB 的中点 N 的轨迹方程是 $x^2 = \frac{4}{3}y$.

思维升华 “相关点法”的基本步骤

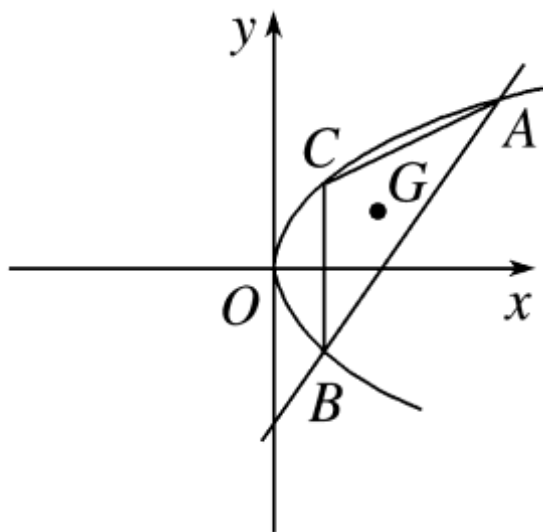
(1) 设点: 设被动点坐标为 (x, y) , 主动点坐标为 (x_1, y_1) ;

(2) 求关系式: 求出两个动点坐标之间的关系式 $\begin{cases} x_1 = f(x, y), \\ y_1 = g(x, y); \end{cases}$

(3) 代换: 将上述关系式代入已知曲线方程, 便可得到所求动点的轨迹方程.

跟踪训练 3 设直线 $x - y = 4a$ 与抛物线 $y^2 = 4ax$ 交于两点 A, B (a 为定值), C 为抛物线上任意一点, 求 $\triangle ABC$ 的重心的轨迹方程.

解 设 $\triangle ABC$ 的重心为 $G(x, y)$,



点 C 的坐标为 (x_0, y_0) , $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

由方程组 $\begin{cases} x - y = 4a, \\ y^2 = 4ax, \end{cases}$

消去 y 并整理得

$$x^2 - 12ax + 16a^2 = 0.$$

$$\therefore x_1 + x_2 = 12a,$$

$$y_1 + y_2 = (x_1 - 4a) + (x_2 - 4a) = (x_1 + x_2) - 8a = 4a.$$

$\because G(x, y)$ 为 $\triangle ABC$ 的重心,

$$\therefore \begin{cases} x = \frac{x_0 + x_1 + x_2}{3} = \frac{x_0 + 12a}{3}, \\ y = \frac{y_0 + y_1 + y_2}{3} = \frac{y_0 + 4a}{3}, \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} x_0 = 3x - 12a, \\ y_0 = 3y - 4a. \end{cases}$$

又点 $C(x_0, y_0)$ 在抛物线上,

$\therefore$ 将点 C 的坐标代入抛物线的方程得

$$(3y - 4a)^2 = 4a(3x - 12a),$$

$$\text{即 } (y - \frac{4a}{3})^2 = \frac{4a}{3}(x - 4a).$$

又点 C 与 A, B 不重合, $\therefore x_0 \neq (6 \pm 2\sqrt{5})a$,

$\therefore \triangle ABC$ 的重心的轨迹方程为

$$(y - \frac{4a}{3})^2 = \frac{4a}{3}(x - 4a)(x \neq (6 \pm \frac{2\sqrt{5}}{3})a).$$

思想与方法系列

22. 分类讨论思想在曲线方程中的应用

典例 (12分) 已知抛物线 $y^2 = 2px$ 经过点 $M(2, -2\sqrt{2})$, 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右焦点恰为抛物线的焦点, 且椭圆的离心率为 $\frac{1}{2}$.

(1)求抛物线与椭圆的方程；

(2)若 P 为椭圆上一个动点， Q 为过点 P 且垂直于 x 轴的直线上的一点， $\frac{|OP|}{|OQ|}=\lambda(\lambda\neq 0)$ ，试求 Q 的轨迹.

思想方法指导 (1)由含参数的方程讨论曲线类型时，关键是确定分类标准，一般情况下，根据 x^2 ， y^2 的系数与 0 的关系及两者之间的大小关系进行分类讨论.

(2)等价变换是解题的关键：即必须分三种情况讨论轨迹方程.

(3)区分求轨迹方程与求轨迹问题.

规范解答

解 (1)因为抛物线 $y^2=2px$ 经过点 $M(2, -2\sqrt{2})$,

所以 $(-2\sqrt{2})^2=4p$ ，解得 $p=2$.

所以抛物线的方程为 $y^2=4x$,

其焦点为 $F(1,0)$ ，即椭圆的右焦点为 $F(1,0)$ ，得 $c=1$.

又椭圆的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，所以 $a=2$,

可得 $b^2=4-1=3$ ，故椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1. \quad [3 \text{ 分}]$$

(2)设 $Q(x, y)$ ，其中 $x\in[-2,2]$ ，

设 $P(x, y_0)$ ，因为 P 为椭圆上一点，

$$\text{所以 } \frac{x^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1,$$

$$\text{解得 } y_0^2=3-\frac{3}{4}x^2.$$

$$\text{由 } \frac{|OP|}{|OQ|}=\lambda \text{ 可得 } \frac{|OP|^2}{|OQ|^2}=\lambda^2,$$

$$\text{故 } \frac{x^2+3-\frac{3}{4}x^2}{x^2+y^2}=\lambda^2,$$

$$\text{得 } (\lambda^2-\frac{1}{4})x^2+\lambda^2y^2=3, \quad x\in[-2,2]. \quad [6 \text{ 分}]$$

$$\text{当 } \lambda^2=\frac{1}{4}, \text{ 即 } \lambda=\frac{1}{2} \text{ 时, 得 } y^2=12,$$

$$\text{点 } Q \text{ 的轨迹方程为 } y=\pm 2\sqrt{3}, \quad x\in[-2,2],$$

此轨迹是两条平行于 x 轴的线段；[8 分]

$$\text{当 } \lambda^2<\frac{1}{4}, \text{ 即 } 0<\lambda<\frac{1}{2} \text{ 时,}$$

$$\text{得到 } \frac{\frac{x^2}{3}}{\lambda^2-\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\lambda^2}=1,$$

此轨迹表示实轴在 y 轴上的双曲线满足 $x\in[-2,2]$ 的部分；[10 分]

$$\text{当 } \lambda^2>\frac{1}{4}, \text{ 即 } \lambda>\frac{1}{2} \text{ 时, 得到 } \frac{\frac{x^2}{3}}{\lambda^2-\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\lambda^2}=1.$$

此轨迹表示长轴在 x 轴上的椭圆满足 $x\in[-2,2]$ 的部分. [12 分]

编制：高中数学教师群 274712379

课时作业

1. (2017·宜春质检) 设定点 $M_1(0, -3)$ ， $M_2(0,3)$ ，动点 P 满足条件 $|PM_1|+|PM_2|=a+\frac{9}{a}$ (其中 a 是正常数)，则点 P 的轨迹是()

- A. 椭圆
- B. 线段
- C. 椭圆或线段
- D. 不存在

答案 C

解析 ∵ a 是正常数, $\therefore a+\frac{9}{a}\geqslant 2\sqrt{9}=6$.

当 $|PM_1|+|PM_2|=6$ 时, 点 P 的轨迹是线段 M_1M_2 ;

当 $a+\frac{9}{a}>6$ 时, 点 P 的轨迹是椭圆,

故选 C.

2. 若曲线 C 上存在点 M , 使 M 到平面内两点 $A(-5,0)$, $B(5, 0)$ 距离之差的绝对值为 8, 则称曲线 C 为“好曲线”. 以下曲线不是“好曲线”的是()

A. $x+y=5$

B. $x^2+y^2=9$

C. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

D. $x^2=16y$

答案 B

解析 ∵ M 到平面内两点 $A(-5,0)$, $B(5,0)$ 距离之差的绝对值为 8, $\therefore M$ 的轨迹是以 $A(-5,0)$, $B(5,0)$ 为焦点的双曲线, 方程为 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

A 项, 直线 $x+y=5$ 过点 $(5,0)$, 故直线与 M 的轨迹有交点, 满足题意;

B 项, $x^2+y^2=9$ 的圆心为 $(0,0)$, 半径为 3, 与 M 的轨迹没有交点, 不满足题意;

C 项, $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的右顶点为 $(5,0)$, 故椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 与 M 的轨迹有交点, 满足题意;

D 项, 方程代入 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, 可得 $y-\frac{y^2}{9}=1$, 即 $y^2-9y+9=0$, $\therefore \Delta>0$, 满足题意.

3. (2019 银川模拟)已知点 P 是直线 $2x-y+3=0$ 上的一个动点, 定点 $M(-1,2)$, Q 是线段 PM 延长线上的一点, 且 $|PM|=|MQ|$, 则 Q 点的轨迹方程是()

A. $2x+y+1=0$

B. $2x-y-5=0$

C. $2x-y-1=0$

D. $2x-y+5=0$

答案 D

解析 由题意知, M 为 PQ 中点,

设 $Q(x, y)$, 则 P 为 $(-2-x, 4-y)$,

代入 $2x-y+3=0$, 得 $2x-y+5=0$.

4. (2019 太原模拟)已知圆锥曲线 $mx^2+4y^2=4m$ 的离心率 e 为方程 $2x^2-5x+2=0$ 的根, 则满足条件的圆锥曲线的个数为()

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

答案 B

解析 ∵ e 是方程 $2x^2-5x+2=0$ 的根,

$\therefore e=2$ 或 $e=\frac{1}{2}$.

$mx^2+4y^2=4m$ 可化为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{m}=1$,

当它表示焦点在 x 轴上的椭圆时,

有 $\frac{\sqrt{4-m}}{2}=\frac{1}{2}$, $\therefore m=3$;

当它表示焦点在 y 轴上的椭圆时,

有 $\frac{\sqrt{m-4}}{\sqrt{m}}=\frac{1}{2}$, $\therefore m=\frac{16}{3}$;

当它表示焦点在 x 轴上的双曲线时,

可化为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{-m}=1$,

有 $\frac{\sqrt{4-m}}{2}=2$, $\therefore m=-12$.

$\therefore$ 满足条件的圆锥曲线有 3 个.

5. 已知点 $A(1,0)$, 直线 $l: y=2x-4$, 点 R 是直线 l 上的一点, 若 $\vec{RA}=\vec{AP}$, 则点 P 的轨迹方程为()

A. $y=-2x$

B. $y=2x$

C. $y=2x-8$

D. $y=2x+4$

答案 B

解析 设 $P(x, y)$, $R(x_1, y_1)$, 由 $\vec{RA} = \vec{AP}$ 知, 点 A 是线段 RP 的中点, $\therefore \begin{cases} \frac{x+x_1}{2}=1, \\ \frac{y+y_1}{2}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1=2-x, \\ y_1=-y. \end{cases}$

$\because$ 点 $R(x_1, y_1)$ 在直线 $y=2x-4$ 上,
 $\therefore y_1=2x_1-4, \therefore -y=2(2-x)-4$, 即 $y=2x$.

6. 平面直角坐标系中, 已知两点 $A(3,1)$, $B(-1,3)$, 若点 C 满足 $\vec{OC}=\lambda_1\vec{OA}+\lambda_2\vec{OB}(O$ 为原点), 其中 $\lambda_1, \lambda_2\in\mathbf{R}$, 且 $\lambda_1+\lambda_2=1$, 则点 C 的轨迹是()
A. 直线 B. 椭圆 C. 圆 D. 双曲线

答案 A

解析 设 $C(x, y)$, 则 $\vec{OC}=(x, y)$, $\vec{OA}=(3,1)$, $\vec{OB}=(-1,3)$,

$\because \vec{OC}=\lambda_1\vec{OA}+\lambda_2\vec{OB}, \therefore \begin{cases} x=3\lambda_1-\lambda_2, \\ y=\lambda_1+3\lambda_2, \end{cases}$

又 $\lambda_1+\lambda_2=1, \therefore x+2y-5=0$, 表示一条直线.

7. 曲线 C 是平面内与两个定点 $F_1(-1,0)$ 和 $F_2(1,0)$ 的距离的积等于常数 $a^2(a>1)$ 的点的轨迹. 给出下列三个结论:

- ①曲线 C 过坐标原点;
- ②曲线 C 关于坐标原点对称;
- ③若点 P 在曲线 C 上, 则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积不大于 $\frac{1}{2}a^2$.

其中, 所有正确结论的序号是_____.

答案 ②③

解析 因为原点 O 到两个定点 $F_1(-1,0)$, $F_2(1,0)$ 的距离的积是 1, 且 $a>1$, 所以曲线 C 不过原点, 即①错误; 因为 $F_1(-1,0)$, $F_2(1,0)$ 关于原点对称, 所以 $|PF_1||PF_2|=a^2$ 对应的轨迹关于原点对称, 即②正确; 因为 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}|PF_1| |PF_2|\sin \angle F_1PF_2\leqslant \frac{1}{2}|PF_1||PF_2|=\frac{1}{2}a^2$, 即 $\triangle F_1PF_2$ 的面积不大于 $\frac{1}{2}a^2$, 所以③正确.

8. (2017·西安月考)已知 $\triangle ABC$ 的顶点 A, B 坐标分别为 $(-4,0), (4,0)$, C 为动点, 且满足 $\sin B+\sin A=\frac{5}{4}\sin C$, 则 C 点的轨迹方程为_____.

答案 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1(x\neq \pm 5)$

解析 由 $\sin B+\sin A=\frac{5}{4}\sin C$ 可知 $b+a=\frac{5}{4}c=10$,

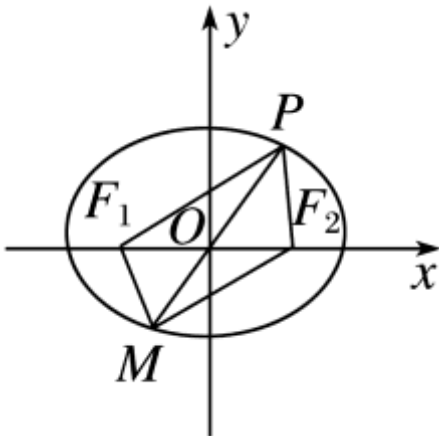
则 $|AC|+|BC|=10>8=|AB|$, $\therefore$ 满足椭圆定义.

令椭圆方程为 $\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1$,

则 $a'=5, c'=4, b'=3$, 则轨迹方程为

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1(x\neq \pm 5)$.

9.如图, P 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的任意一点, F_1, F_2 是它的两个焦点, O 为坐标原点, 且 $\vec{OQ}=\vec{PF_1}+\vec{PF_2}$, 则动点 Q 的轨迹方程是_____.



答案 $\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4b^2}=1$

解析 由于 $\vec{OQ}=\vec{PF_1}+\vec{PF_2}$,

又 $\vec{PF_1}+\vec{PF_2}=\vec{PM}=2\vec{PO}=-2\vec{OP}$,

设 $Q(x, y)$,

则 $\vec{OP}=-\frac{1}{2}\vec{OQ}=(-\frac{x}{2}, -\frac{y}{2})$,

即 P 点坐标为 $(-\frac{x}{2}, -\frac{y}{2})$, 又 P 在椭圆上,

则有 $\frac{(-\frac{x}{2})^2}{a^2} + \frac{(-\frac{y}{2})^2}{b^2} = 1$, 即 $\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1$.

10. 已知圆的方程为 $x^2 + y^2 = 4$, 若抛物线过点 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ 且以圆的切线为准线, 则抛物线焦点的轨迹方程是_____.

答案 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 (y \neq 0)$

解析 设抛物线的焦点为 F , 过 A, B, O 作准线的垂线 AA_1, BB_1, OO_1 ,

则 $|AA_1| + |BB_1| = 2|OO_1| = 4$,

由抛物线定义得 $|AA_1| + |BB_1| = |FA| + |FB|$,

$\therefore |FA| + |FB| = 4 > 2 = |AB|$, 故 F 点的轨迹是以 A, B 为焦点,

长轴长为 4 的椭圆(去掉长轴两 endpoints).

11. 已知实数 $m > 1$, 定点 $A(-m, 0)$, $B(m, 0)$, S 为一动点, 点 S 与 A, B 两点连线斜率之积为 $-\frac{1}{m^2}$.

(1) 求动点 S 的轨迹 C 的方程, 并指出它是哪一种曲线;

(2) 若 $m = \sqrt{2}$, 问 t 取何值时, 直线 $l: 2x - y + t = 0 (t > 0)$ 与曲线 C 有且只有一个交点?

解 (1) 设 $S(x, y)$, 则 $k_{SA} = \frac{y-0}{x+m}, k_{SB} = \frac{y-0}{x-m}$.

由题意, 得 $\frac{y^2}{x^2 - m^2} = -\frac{1}{m^2}$,

即 $\frac{x^2}{m^2} + y^2 = 1 (x \neq \pm m)$.

$\because m > 1, \therefore$ 轨迹 C 是中心在坐标原点, 焦点在 x 轴上的椭圆(除去 x 轴上的两顶点), 其中长轴长为 $2m$, 短轴长为 2.

(2) $m = \sqrt{2}$, 则曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1 (x \neq \pm\sqrt{2})$.

由 $\begin{cases} 2x - y + t = 0, \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \end{cases}$

消去 y , 得 $9x^2 + 8tx + 2t^2 - 2 = 0$.

令 $\Delta = 64t^2 - 36 \times 2(t^2 - 1) = 0$, 得 $t = \pm 3$.

$\because t > 0, \therefore t = 3$.

此时直线 l 与曲线 C 有且只有一个交点.

12. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 过左焦点且倾斜角为 45° 的直线被椭圆截得的弦长为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 若动直线 l 与椭圆 E 有且只有一个公共点, 过点 $M(1, 0)$ 作 l 的垂线, 垂足为 Q , 求点 Q 的轨迹方程.

解 (1) 因为椭圆 E 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

解得 $a^2 = 2b^2$, 故椭圆 E 的方程可设为

$\frac{x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

则椭圆 E 的左焦点坐标为 $(-b, 0)$,

过左焦点且倾斜角为 45° 的直线方程为 $l': y = x + b$.

设直线 l' 与椭圆 E 的交点为 A, B ,

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = x + b \end{cases}$ 消去 y ,

得 $3x^2 + 4bx = 0$, 解得 $x_1 = 0, x_2 = -\frac{4b}{3}$.

因为 $|AB| = \sqrt{1 + 1^2} |x_1 - x_2|$

$= \frac{4\sqrt{2}b}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$,

解得 $b = 1$.

故椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2)①当切线 l 的斜率存在且不为 0 时，

设 l 的方程为 $y=kx+m$ ，联立直线 l 和椭圆 E 的方程，

得
$$\begin{cases} y=kx+m, \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1, \end{cases} \quad \text{消去 } y \text{ 并整理，}$$

得 $(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-2=0$.

因为直线 l 和椭圆 E 有且只有一个交点，

所以 $\Delta=16k^2m^2-4(2k^2+1)(2m^2-2)=0$.

化简并整理，得 $m^2=2k^2+1$.

因为直线 MQ 与 l 垂直，

所以直线 MQ 的方程为 $y=-\frac{1}{k}(x-1)$.

联立方程组
$$\begin{cases} y=-\frac{1}{k}(x-1), \\ y=kx+m, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x=\frac{1-km}{1+k^2}, \\ y=\frac{k+m}{1+k^2}, \end{cases}$$

所以 $x^2+y^2=\frac{(1-km)^2+(k+m)^2}{(1+k^2)^2}$

$$=\frac{k^2m^2+k^2+m^2+1}{(1+k^2)^2}$$

$$=\frac{(k^2+1)(m^2+1)}{(1+k^2)^2}$$

$$=\frac{m^2+1}{1+k^2},$$

把 $m^2=2k^2+1$ 代入上式得 $x^2+y^2=2$.(*)

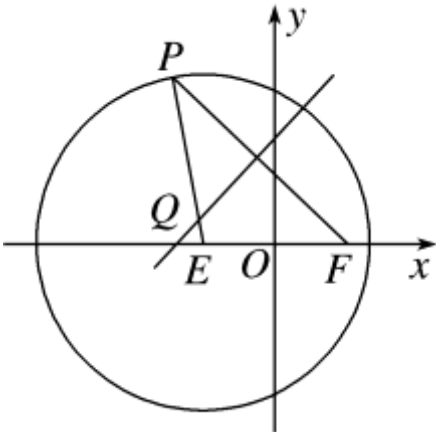
②当切线 l 的斜率为 0 时，

此时 $Q(1,1)$ 或 $Q(1,-1)$ ，符合(*)式.

③当切线 l 的斜率不存在时，此时 $Q(\sqrt{2},0)$ 或 $Q(-\sqrt{2},0)$ 符合(*)式.

综上所述，点 Q 的轨迹方程为 $x^2+y^2=2$.

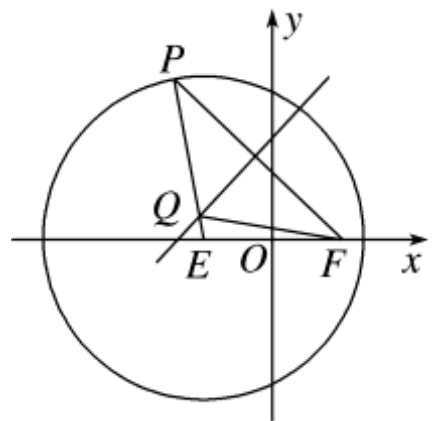
*13.(2019 河北衡水中学三调)如图，已知圆 $E: (x+\sqrt{3})^2+y^2=16$ ，点 $F(\sqrt{3},0)$ ， P 是圆 E 上任意一点，线段 PF 的垂直平分线和半径 PE 相交于点 Q .



(1)求动点 Q 的轨迹 Γ 的方程；

(2)设直线 l 与(1)中轨迹 Γ 相交于 A, B 两点，直线 OA, l, OB 的斜率分别为 k_1, k, k_2 (其中 $k>0$)， $\triangle OAB$ 的面积为 S ，以 OA, OB 为直径的圆的面积分别为 S_1, S_2 ，若 k_1, k, k_2 恰好构成等比数列，求 $\frac{S_1+S_2}{S}$ 的取值范围.

解 (1)连接 QF ，根据题意，



$|QP|=|QF|,$

则 $|QE|+|QF|=|QE|+|QP|$
 $=4>|EF|=2\sqrt{3}$,
 故动点 Q 的轨迹 Γ 是以 E, F 为焦点,
 长轴长为 4 的椭圆.
 设其方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,
 可知 $a=2, c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$, 则 $b=1$,
 $\therefore$ 点 Q 的轨迹 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)设直线 l 的方程为 $y=kx+m$,

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

联立方程 $\begin{cases} y=kx+m, \\ x^2+4y^2=4, \end{cases}$ 整理得,

$(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$,

$\Delta=16(1+4k^2-m^2)>0$,

$x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2}, x_1x_2=\frac{4(m^2-1)}{1+4k^2}$.

$\because k_1, k, k_2$ 构成等比数列,

$\therefore k^2=k_1k_2=\frac{(kx_1+m)(kx_2+m)}{x_1x_2}$,

整理得 $km(x_1+x_2)+m^2=0$,

$\therefore \frac{-8k^2m^2}{1+4k^2}+m^2=0$, 解得 $k^2=\frac{1}{4}$.

$\because k>0, \therefore k=\frac{1}{2}$.

此时 $\Delta=16(2-m^2)>0$,

解得 $m\in(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

又由 A, O, B 三点不共线得 $m\neq 0$,

从而 $m\in(-\sqrt{2}, 0)\cup(0, \sqrt{2})$.

故 $S=\frac{1}{2}|AB|d=\frac{1}{2}\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|\cdot\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2} \cdot|m|$

$=\sqrt{2-m^2}|m|$.

又 $\frac{x_1^2}{4}+y_1^2=\frac{x_2^2}{4}+y_2^2=1$,

则 $S_1+S_2=\frac{\pi}{4}(x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2)$

$=\frac{\pi}{4}(\frac{3}{4}x_1^2+\frac{3}{4}x_2^2+2)$

$=\frac{3\pi}{16}[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{4}$ 为定值.

$\therefore \frac{S_1+S_2}{S}=\frac{5\pi}{4}\times\frac{1}{\sqrt{(2-m^2)m^2}}\geqslant\frac{5\pi}{4}$,

当且仅当 $m=\pm 1$ 时等号成立.

综上, $\frac{S_1+S_2}{S}\in[\frac{5\pi}{4}, +\infty)$.