

基于数学抽象的“函数性质”单元教学设计^①

罗德建¹ 刘春艳^{2②}

(1. 北京师范大学附属中学 100052; 2. 北京教育学院 100044)

数学抽象位于数学学科核心素养之首,也是数学基本思想之一,让高中学生经历数学抽象的过程,体会数学抽象的方法,对于其理性思维的发展和创新能力的培养起着至关重要的作用. 数学抽象主要表现为:获得数学概念和规则,提出数学命题和模型,形成数学方法与思想,认识数学结构与体系^[1]. 由此可见,数学概念是发展学生数学抽象素养的重要载体.

函数是现代数学最基本的概念,是高中阶段最重要的概念之一,是贯穿高中数学课程的主线. 函数性质是函数概念的延伸,对于深入理解函数概念、应用函数模型分析和解决相关问题起着承上启下的关键作用. 对于函数性质的学习,一方面学生缺少系统地研究函数性质的经验,另一方面用数学符号语言表达函数性质,既严谨又抽象,所以在学习这部分内容时学生普遍感觉难度很大. 在诸多与函数性质教学有关的文章中,大都聚焦于如何对函数的某一种性质开展教学,如文[2]、[3]等. 那么,如何帮助学生从整体上认识函数的不同性质、发现不同性质之间的共性,通过函数性质的学习,经历数学概念的抽象过程,积累研究性质的经验,进一步提升数学抽象的思维水平? 这是值得我们思考的问题.

文[4]从数学教学的视角,建立了“基于数学抽象的概念形成模型”,使得基于数学抽象的概念教学更有抓手. 应用该模型,函数性质概念的抽象过程可依据如下模式进行:首先创设情境,从一些熟知的函数及其图象入手,识别关键要素;利用符号语言对函数值 y 随自变量 x 的变化而变化的规律进行定量刻画,分析与建构关键要素之间的逻辑关系,形成函数性质的概念;通过应用实现函

数性质的精致化与系统化. 在这个过程中,让学生从直观感知上升到理性认识,经历从“简约”,到“符号”,再到“普适”^[5]的数学抽象的全过程,形成自己对函数性质的感悟和理解,提升数学抽象素养.

我们知道,单元教学设计有助于学生实现学习进阶、建构数学知识体系,学会用联系的观点思考问题,对所学内容进行分析、评价与整合创造. 文[6]提出了数学单元教学操作的具体流程. 本文尝试从单元教学角度,将不同函数性质的教学形成整体设计,并应用“基于数学抽象的概念形成模型”帮助学生经历形成函数性质概念的过程,深入理解性质本质,体会数学抽象的思想与方法.

1 “函数性质”单元教学设计

1.1 教学内容分析

研究函数是出于实际的需要,生活中的变化无处不在,我们需要用函数来刻画变量之间的相互依赖关系. 函数的应用体现在通过建立函数模型解决与运动变化、对应关系、几何变换等有关的数学问题、现实问题和科学问题中. 函数模型的性态就是事物的变化规律,把握了函数的性态就掌握了事物的变化规律^[7].

性质是变化中的不变性或规律性. 高中阶段学习的函数性质包括单调性、奇偶性、周期性、最值、极值、零点等. 不同函数性质的本质都是当自变量变化时,对应的函数值在随之变化的过程中体现出的不变性或规律性,因此要紧扣函数的三要素来探索和发现函数的性质. 变量的变化是指其取值的变化,即从一个值变到另一个值,对于实数集,序关系也就是通常的大小关系,是基本也是重要的关系. 因此,我们会关注当自变量 x 增大

① 本文为北京教育学院卓越计划“学科核心素养导向的高中数学教学研究”研究成果.

② 本文通讯作者.

时,对应的函数值 y 的变化是否保持同序(或变为反序),这就是函数单调性的本质特征,也是所有函数都可以研究的一个性质.单调性决定了函数图象的走势,这也是我们在研究函数图象时应首先考虑的特征.单调性与其他函数性质密切相关,如函数的最值、极值、零点等;由函数单调性还可以解决函数值的大小比较、求解不等式、方程根的分佈等问题.从这个意义上讲,单调性是函数性质中应首先研究的性质,是函数最重要的性质之一.

当自变量 x 呈特殊变化,如取相反数,由 x 变化到 $-x$ 时,对应的函数值 y 不变或变为相反数,即为函数的奇偶性;当自变量 x 变化到 $x+T$ 时,对应的函数值 y 不变,即为函数的周期性.对于具有奇偶性和周期性的函数,可以由函数的局部性质得到函数的整体性质,帮助我们简化研究过程.当自变量 x 在定义域内变化时,对应的函数值 y 是否有界及能否取到上界或下界,即为函数的有界性或最值问题.若将自变量 x 的变化范围缩小到定义域内某点附近的一个邻域,则函数在该邻域内的最值即为该函数的一个极值.若关注自变量 x 在定义域内取何值时,对应的函数值 y 为 0,即为函数的零点.最值、极值、零点等性质对应了函数图象上的特殊点.

研究函数性质的一般方法是“图形直观—自然语言—形式化定义”^[8],用“函数图象”和“代数运算”的方法来研究函数性质,这里体现了“形”与“数”的结合,即“通过几何建立直观,通过代数予以表达”^[9].

1.2 学情分析

在学习函数性质之前,学生已经学习了函数及其表示方法,知道函数是一种实数集合之间的对应关系,可以用解析式、图象、表格等方法来表示.对于函数这个数学对象来说,类比在预备知识中对集合、等式、不等式等数学对象的研究过程,还应该研究函数的性质、分类、应用等.这也是研究一个新的数学对象的一般过程.

初中教材没有对“函数性质”进行严格界定,只是从直观上分别对三类具体函数(一次函数、二次函数、反比例函数)的图象特征进行观察,发现图象的变化规律,再根据这些规律得出数值大小的性质,并用自然语言进行描述.对“函数性质”,没有明确的数学符号表达,也没有对三类函数的

性质进行归纳.事实上,大多数学生能大致知道什么是“函数性质”,也能通过观察函数图象发现函数的一些性质,但还需体会严格定义函数性质的必要性,比如我们画出的函数图象只是大致图象,由离散到连续的过程不能仅仅依靠直观感知,而需通过严格定义的函数性质来规范函数图象.此外,对于初中不涉及的函数性质,如何引导学生观察,如何引入符号语言对定性描述的函数性质进行定量刻画,以及如何整合与性质有关的各个要素,归纳出定义等等,都是学生在函数性质学习中会遇到的困难.

1.3 教学目标分析

《普通高中数学课程标准(2017年版)》中,对“函数性质”的内容要求是:①借助函数图象,会用符号语言表达函数的单调性、最大值、最小值,理解它们的作用和实际意义.②结合具体函数,了解奇偶性的概念和几何意义.③结合三角函数,了解周期性的概念和几何意义.

对于上述目标可进一步理解为:借助一次函数、二次函数、反比例函数等学生熟悉的函数,将函数图象“从左至右看上升或下降”的直观描述与“函数值 y 随自变量 x 的增大而增大或减小”的性质相对应,会由“自然语言表达”过渡到“符号语言表达”,进而得到函数单调性的定义.符号语言是指集合、逻辑用语、与函数有关的不等式.类似的,可以得到函数最值的定义.能举例说明单调函数与非单调函数、有最值的函数与无最值的函数;能根据单调性、最值对一些函数进行分类.奇偶性和周期性是初中阶段没有学过的函数新性质,可通过观察具体函数的图象“发现”对称性,由任意角三角函数的定义“体会”周期性,类比单调性的研究过程,用符号语言描述函数图象的直观特征,得到奇偶性和周期性的定义.

在函数单调性、奇偶性等概念的形成过程中,经历由具体直观到抽象概括,由图形语言和自然语言到符号语言表达的过程,加深对函数概念的理解,体会数形结合的思想方法,发展数学抽象素养.

1.4 教学过程

将单元教学目标分解到课时,以人教B版高中数学必修教材为例,函数单调性、最值的教学可设定为3课时,其中第1课时是函数单调性的定义与证明,第2课时是函数最值的定义、单调性的

简单应用,第3课时是函数的平均变化率、单调性的综合应用;函数奇偶性的教学可设定为2课时,其中第1课时是函数奇偶性的定义与证明,第2课时是函数奇偶性的应用.

下面笔者将以函数单调性第1课时、函数奇偶性第1课时的主要过程为例阐释函数性质教学的一般过程.

课例1 函数的单调性

(一)情境引入

问题1:我们已经学习了函数的概念,类比前面面对集合、等式、不等式等数学对象的研究过程,接下来需要研究函数性质.分别画出函数 $g(x)=3x-1$, $f(x)=x^2$, $h(x)=\frac{2}{x}$ 的图象,观察图象特征,这几个函数分别具有哪些性质?

追问1.1:根据对等式“性质”、不等式“性质”的理解,你认为什么是函数的“性质”?

追问1.2:函数的性质包括哪些内容?

追问1.3:如何研究函数的性质?

追问1.4:这三类函数的单调性都是根据对应的图象特征观察出来的,如果函数只有解析式,不知道其图象,如函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x)=x+\frac{1}{x}$,如何研究这些函数的单调性呢?在前面的学习中,我们用集合语言 and 对应关系刻画函数,建立了完整的函数概念.对于函数的单调性,也可以类似地尝试用符号语言给出严格地形式化定义.怎样用符号语言来描述“y随x的增大而增大(或减小)”呢?

设计意图 引入环节的设置强化对一个数学对象研究的基本方法:对象—性质—联系—应用.作为函数性质单元的起始课,承担着承上启下的作用,既与前面的函数概念一脉相承,又为后续的联系与应用奠定基础.通过回顾三类具体函数的图象与性质,提出本单元统摄性的问题:什么是函数的性质,函数性质包括哪些内容,以及如何研究函数的性质.引导学生从更一般的角度思考函数性质的研究内容和方法,聚焦函数单调性的相关要素.通过实例,让学生感受到再次研究函数单调性的必要性,启发学生从代数角度,尝试用符号语言严格的给出单调性的定义,让学生感受到对函数单调性的再研究基于初中的直观认识,是对初

中认识的延续与深化,并在这个过程中感悟数学思想,形成基本数学活动经验.

(二)分析建构

问题2:函数 $f(x)=x^2$ 的单调性是怎样得到的?你能用符号语言定量的描述“y随x增大而增大(或减小)”吗?

学生在描点、连线绘图的过程中,感受到从左至右图象下降或上升的趋势,同时体会到严格解释“y随x的变化如何变化”的必要性.

追问2.1:先看y轴右侧部分的函数图象,x在什么范围增大?

追问2.2:你怎么理解“x增大”?

追问2.3:对于自变量x,为什么是取两个值,而不是取三个值或者更多?

追问2.4: x_1 和 x_2 是怎么取的?取两个特殊的 x_1 和 x_2 可以吗?为什么?

追问2.5:如何理解对应的函数值y随自变量x的增大而发生的变化?

追问2.6:如何描述“对应的y增大”了?

追问2.7:图象可以帮助我们发现结论,但不能作为严格证明.你能严格证明“对于函数 $f(x)=x^2$,当 $x \geq 0$ 时,y随x的增大而增大”吗?

设计意图 从学生熟悉的二次函数入手,由形到数,逐步实现由自然语言表达到符号语言表达的转换,围绕函数概念的三要素,理清单调性定义中涉及的各个要素之间的逻辑关系,初步建构函数单调性的定义,让学生感受到数学的严谨性.

(三)抽象概括

问题3:根据刚才的分析,从特殊到一般,你能用符号语言给出增函数的判断规则吗?

追问3.1:增函数的图象具有什么特征?

追问3.2:类比刚才的研究过程,能否给出减函数的判断规则?

追问3.3:减函数的图象具有什么特征?

设计意图 利用“从特殊到一般”和“类比”的数学思想方法,明确单调性的定义和属性.在形成函数单调性定义及其对应的图象特征的过程中,让学生进一步体会给一个数学对象下定义的一般过程与方法.

(四)应用理解

问题4:两人一组,每人写出一个一次函数、二次函数和反比例函数,并请队友分别写出它们的单调区间.

追问 4.1: 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在定义域内是减函数吗? 为什么?

追问 4.2: 能否说区间 $(0, 1)$ 是函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的单调递减区间? 为什么?

例 1: 根据定义, 研究函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的单调性.

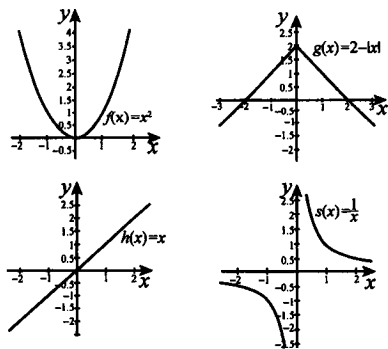
例 2: 写出函数 $g(x) = x + \frac{1}{x}$ 的一个单调区间, 并证明你的结论.

设计意图 突出函数单调性是定义域内某一区间上的性质, 是函数的局部性质. 我们在求函数的单调区间时, 一般默认是求出函数的最大单调区间. 运用函数单调性的定义解决本节课初始提出的问题, 前后呼应.

课例 2 函数的奇偶性

(一) 情境引入

问题 1: 观察函数 $f(x) = x^2$, $g(x) = 2 - |x|$, $h(x) = x$, $s(x) = \frac{1}{x}$ 的图象, 它们有什么共同特征吗?



设计意图 通过熟悉的函数及其图象, 明确提出研究问题, 聚焦奇偶性的本质属性——对称性.

(二) 分析建构

问题 2: 上述函数都具有对称性, 具体分为几种情况?

追问 2.1: 函数有三要素, 其中定义域和对应关系起决定性的作用. 要保证函数图象的对称性, 对于函数的定义域和对应关系有什么特殊要求吗?

追问 2.2: 对于 $f(x) = x^2$ 和 $g(x) = 2 -$

$|x|$ 这类函数, 其图象关于 y 轴对称, 类比函数单调性, 如何用符号语言描述“函数图象关于 y 轴对称”?

追问 2.3: “对定义域内任意自变量 x , 函数 $f(x)$ 都满足 $f(-x) = f(x)$ ”与“ $f(x)$ 图象关于 y 轴对称”是否等价?

追问 2.4: 你还能举出其他具有这种性质的函数吗?

设计意图 从函数三要素出发, 引导学生关注定义域和对应关系, 这也是奇偶性的核心要素, 再建构要素之间的逻辑关系.

(三) 抽象概括

问题 3: 我们将具有这种性质的函数叫做偶函数, 根据上面的分析, 你能给偶函数下个定义吗?

追问 3.1: 如果已知偶函数在 y 轴一侧的图象, 你能画出它在另一侧的图象吗? 为什么?

追问 3.2: 类比上述研究过程, 你能否用符号语言刻画图象特征为“关于原点对称”对应的性质? 进而给另一类函数“奇函数”下个定义?

追问 3.3: 如果已知奇函数在 y 轴一侧的图象, 你能画出它在另一侧的图象吗? 为什么?

设计意图 明确奇偶性的定义和本质属性, 通过类比的方法下定义, 理解数学定义的逻辑结构, 提升学生抽象概括的能力.

(四) 应用理解

问题 4: 函数的奇偶性与单调性有什么不同? 它们有什么联系吗?

问题 5: 两人一组, 每人写出一个奇函数、一个偶函数、一个非奇非偶函数, 一个既是奇函数又是偶函数的函数, 请队友进行证明.

追问 5.1: 这些函数是怎样构造出来的?

2 对“函数性质”单元教学的反思与建议

单元教学最重要的特征就是整体有序性, 在“函数性质”的单元设计中, 更加明确函数主线的研究方向, 更加清晰地建立不同函数性质之间的内在联系. 主要体现在:

(1) 重视单元引入和单元小结

如“函数的单调性”一节中, 情境引入的问题 1 及前 3 个追问, 就是单元引入, 明确单元学习的主要内容和基本方法: 主要内容有单调性、最值、奇偶性(对称性)等, 基本方法是“由形到数”、“从特殊到一般”、“从具体到抽象”等, 帮助学生初步

建立单元知识体系.限于篇幅,本文没有呈现单元小结,在实际教学中,单元小结再次复习回顾了函数性质的研究脉络和研究方法,梳理函数不同性质之间的联系.

(2)重视函数性质的抽象过程

教学设计从形式上遵循“总—分—总”的结构,首尾呼应,更重要的是内在逻辑关系的一致性.本单元设计在“基于数学抽象的概念形成模型”基础上,根据函数性质的本质特征,建立了“基于数学抽象的函数性质的概念形成过程”,即情境引入—分析建构—抽象概括—应用理解.在这条主线的引导下,更加突出函数性质的整体性,学生可以举一反三,逐步独立去研究更多的函数性质,并迁移至后续的教学,如让学生自己去发现和探究圆锥曲线的几何性质等,促进其数学抽象素养的提升.

(3)重视对函数概念的进一步理解

函数性质刻画的是函数的要素之间的关系,是函数概念精致化和系统化^[4]的一部分.一方面,研究的过程基本一致.函数性质的教学过程设计与函数概念的是一致的,均从熟悉的具体函数入手,学生经历由直观描述到符号语言表达的抽象过程;另一方面,对于函数性质的研究始终围绕函数概念进行,即当自变量 x 变化时,对应的函数值 y 随之变化,这种变化中不变的规律正是函数的性质.在研究的过程中充分利用“数形结合”、“运动变化”、“特殊到一般”、“类比”等思想方法,这些也是函数概念学习中需要重视的.进一步,后续对函数性质的理解和应用也是函数概念和函数性质精致化和系统化的过程.

在学习中还可以联系或类比其他数学对象的性质,如类比不等式的“性质”体会函数的“性质”,提升对“性质”的理解.需要指出的是,对于每个不同的函数性质的发现过程不一定是真正意义上的归纳,如周期性,在教学中可适当淡化归纳,强调如何由“形”到“数”,抓住性质的本质特征,用符号语言严格定义函数性质.

(4)重视对函数性质的进阶设计

函数性质的学习是一个学习进阶的过程,即学生在一个较大时间跨度内对某一学习主题的认识、理解和实践从简单到复杂、从低水平到高水平的发展过程^[10].教师应将各个函数性质的教学进行进阶处理,在单调性的教学中由例子到规则,注

重问题引导,加强符号语言的指导;在最值、奇偶性、零点、周期性、极值等函数性质的教学中敢于放手,充分利用“类比”的方法,重在追问的设计和师生共同完善定义的过程.让学生从模仿、类比到迁移、创造,体会研究函数性质的一般方法,熟悉对一般规则的符号和逻辑表达,将对函数性质的认识和学习置于函数主线中,注重联系,螺旋上升,逐渐深入.

数学重思维、讲逻辑,数学教学应通过问题设计和数学活动的开展,让学生经历数学概念的形成过程,学会如何去除背景,抓住本质属性,归纳共同特征,抽象出数学对象,用符号语言合理定义,并研究其相关应用,这样的数学课才会具有“数学的味道”.体现在函数性质的教学中,应注重培养学生学会观察和分析,并利用“符号语言”进行表达,有意识地运用函数的概念与性质去认识和表达客观规律.基于数学抽象的函数及其性质的教学有助于函数思维的形成.学生在这个过程中不仅能体会到研究函数及其性质的普适性方法,还能迁移形成研究一个新的数学对象及其性质的一般方法.授之以鱼,不如授之以渔,长此以往,这样的教学必然能实现落实“四基”、促进“四能”的课程目标,真正提升学生的数学核心素养.

参考文献

- [1]中华人民共和国教育部制定.普通高中数学课程标准(2017年版)[M].北京:人民教育出版社,2018:5
- [2]邓翰香,吴立宝,沈婕.指向数学抽象素养的教材分析框架与案例剖析—以人教A版“函数单调性”为例[J].数学通报,2019,58(10):33—38
- [3]李祥兆,王小杭.高一学生对函数奇偶性的认知研究[J].数学教育学报,2010(6):50—52
- [4]刘春艳.基于数学抽象的概念形成:模型与案例[J].数学通报,2021,60(6):20—25;29
- [5]史宁中.数学基本思想18讲[M].北京:北京师范大学出版社,2016:14
- [6]吕世虎,杨婷,吴振英.数学单元教学设计的内涵、特征以及基本操作步骤[J].当代教育与文化,2016(7):41—46
- [7]章建跃.第三章“函数的概念与性质”教材介绍与教学建议[J].中学数学教学参考,2019(10):17—24
- [8]钱佩玲.数学思想方法与中学数学(第二版)[M].北京:北京师范大学出版社,2008:118
- [9]史宁中.数形结合与数学模型[M].北京:高等教育出版社,2018:VI
- [10]吴颖康,邓少博,杨洁.数学教育中学习进阶的研究进展及启示[J].数学教育学报,2017(12):40—46