

体现数学本质的概念教学设计

——以“函数的概念和图象”为例

金 鹏 高建平 （江苏省苏州高新区第一中学 215011）

《普通高中数学课程标准(2017 年版)》明确提出：“基于数学核心素养的教学活动应该把握数学的本质。”什么是数学本质？数学本质就是数学内容本身所具有的根本属性，是数学内容区别于其他学科内容的基本特质。傅赢芳、喻平在文[1]中指出：“对数学本质的理解是学生发展数学核心素养的必要条件，数学教学要关注知识的源起、发展、价值和意义以及学科的内在本质和规律，引导学生从学科的视角理解世界和分析问题，培养学科意识和思维习惯。”数学教学应该注重数学本质的呈现，这是数学教学的立足之本。基于此，笔者以“函数的概念和图象”为例谈谈如何在数学概念教学中体现数学本质，呈己之见，与同行探讨。

1 对教材内容深透理解

英国哲学家罗素曾说：“凡是你教的东西，要教得透彻。”这就意味着教师必须要深钻教材，理清知识发

生的本质，把握教材中最主要、最本质的东西。“函数的概念和图象”是教材必修1第2章“函数的概念”中的第1节内容，学生在初中已初步学习了函数知识，掌握了一些简单函数的表示法、性质、图象。本节内容是对函数概念的再认识，是对函数概念的深化与提高。为了帮助学生在原有认知基础上突破认知瓶颈（由变量说向对应说的转变），整个设计从实际背景和定义两个方面帮助学生理解函数概念的本质，而如何理解从集合的角度抽象出函数概念的本质正是本节的重难点所在。基于此，本节立足于学生所认识到的客观现实中的生活实例，从具体问题入手，引导学生通过实验、观察、归纳、抽象、概括等活动，数学地提出、分析和解决问题。

为了使学生了解函数概念产生的背景，丰富函数的感性认识，执教者力图通过本节课的教学，让学生通过“经历”和“体验”达到“了解”“理解”的水平。具体如表1。

表 1

行为方面		水平方面	
经历	经历数学抽象的过程； 经历函数概念的形成过程	了解	了解函数是非空数集到非空数集的一个对应； 了解函数的三要素
体验	体会函数是描述变量之间依赖关系的重要数学模型； 体会用集合与对应的语言来刻画函数； 体会对应关系在刻画函数概念中的作用	理解	理解函数概念的本质； 理解抽象的函数符号 $f(x)$ 的意义

2 教学设计要着重突出数学本质

张奠宙教授指出：数学教学的目标之一，是要把数学知识的学术形态转化为教育形态，这是所有教师的责任。实际上，数学知识的学术形态通常表现出“冰冷的美丽”，而数学知识的教育形态正是一种“火热的思考”。数学教师的任务在于把数学形式化的逻辑链条，真实地还原为当初数学家发明（发现）时进行数学思维的过程。为了使学生了解函数的本质，本文真实地呈现其发展的历程。下面摘取三个片段。

• 教学片段 1

问题 1 初中曾经学过哪些函数？

生：一次函数、二次函数、反比例函数。

师：比如 $y = x + 1$, $y = x^2 + 2x + 3$, $y = \frac{1}{x}$ ，这些都是初中学过的函数。

问题 2 初中的函数是怎样定义的？

生：一个量 y 随另外一个量 x 变化。

师：他描述得准确吗？还能不能更准确一些呢？

生：在一变化过程中有两个变量 x 与 y ，对于变量 x 的每一个值，变量 y 都有唯一的值与它对应，那么称 y 是 x 的函数。

问题 3 为什么要建立函数的概念？函数的概念是如何建立的？

（教室内一片沉寂）

师：函数概念是数学概念中最重要的概念之一，纵观 300 年来函数概念的发展，众多数学家从多种角度不断赋予函数概念以新的思想，从而推动了整个数学的发展。下面就让我们翻开历史，一起来看一看“函数”的来龙去脉吧。

(通过 PPT 介绍函数概念的发展与形成的第一阶段:函数的变量说)

17 世纪伽俐略在《两门新科学》一书中,用文字和比例的语言表达函数的关系.1718 年约翰·贝努利对函数概念进行了明确定义,他把变量 x 和常量按任何方式构成的量叫做“ x 的函数”.欧拉在《无穷分析引论》(1748)中给出的函数定义是:“一个变量的函数是由该变量和一些数或常量以任何方式组成的解析式.”

17 和 18 世纪的数学家对函数问题的认识有着共同的思考:函数就是解析式.

问题 4 $y=1(x \in \mathbf{R})$ 是函数吗?是不是所有的函数关系都能用解析式表示?没有解析式的能算作函数吗?

学生众说纷纭.

设计意图 基于学生的最近发展区,从学生初中学习的知识入手,但其对函数这个概念仍然是模

糊的,特别是为什么要建立函数的概念?函数的概念是如何建立的?概念的形成经历了哪些过程?等等.基于此,通过阅读材料,让学生沿着数学家探索函数概念所走过的路,了解概念的来龙去脉,经历知识发生发展的过程.从数学自身的发展来看,变量与函数概念的引入,标志着数学由常量数学向变量数学迈进.初中函数概念是用“变量说”来定义的,这种定义方式有易于学生接受的一面,也有其不足的一面^[2].例如,当我们遇到问题 4, y 是一个常数,并没有体现出一个量随另外一个量变化,学生就会疑惑这到底是不是函数,由此需要对函数进行更深一步的研究.

• 教学片段 2

在现实生活中,我们可能会遇到下列问题:

1.估计人口数量变化趋势是我们制定一系列相关政策的依据.从人口统计年鉴中可以查得我国 1949—1999 年人口数据资料如表 2 所示,你能根据该表说出我国人口的变化情况吗?

表 2

年份	1949	1954	1959	1964	1969	1974	1979	1984	1989	1994	1999
人口数 / 百万	542	603	672	705	807	909	975	1 035	1 107	1 177	1 246

2.一个物体从静止开始下落,下落的距离 y (单位: m) 与下落时间 x (单位: s) 之间近似地满足关系式 $y=4.9x^2$.若一物体下落 2 s ,你能求出它下落的距离吗?

3.图 1 为某市一天 24 小时内的气温变化图.

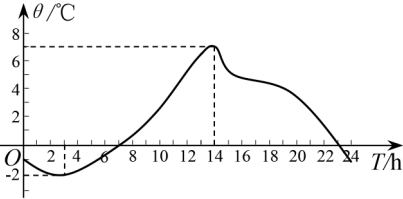


图 1

(1)上午 6 时的气温约是多少?全天的最高、最低气温分别是多少?

(2)在什么时刻,气温为 0°C ?

(3)在什么时段内,气温在 0°C 以上?

评注 对于上述问题,从学生的实际情况来看,也只能是从表面上去回答,问题 2、3 还可以根据解析式和图象去寻求解答,而对于问题 1 学生最多也只能发现随着年份的增加,人口越来越多.对于接下来如何研究函数、怎样抽象出函数的概念仍然没有清晰的路线与方法.教师可以引导学生进一步提出一系列有层次的问题,并借助函数的发展史,借鉴数学家的研究路线等开始概念学习.

问题 1 当情境 1 中年份确定时,相应年份的人

口数是否确定?那么你能根据表格写出 1949—1999 年年份与我国人口数的关系式吗?

问题 2 当情境 3 中的时间确定时,相应的温度是否确定?你能写出温度随时间变化的关系式吗?

问题 3 上述问题有变量吗?有几个变量?分别是什么?

问题 4 上述例子中变量间的关系有什么共同特点?

(待学生充分思考、讨论、交流、阐述后,教师带领学生通过 PPT 再次了解函数概念的发展与形成的第二阶段:变量的对应说)

欧拉发现函数表示的是变量的一种依赖关系,并于 1755 年在《微分学原理》序言中给出定义:“如果某个量依赖于另一个量,当后面这个量变化时,前面这个量也随之变化,则前面这个量称为后面这个量的函数.”但也有学者发现并不是所有变量之间都具有依赖性,如果在解析式中找不到 x, y 的对应关系,那么还能算作函数吗?1823 年柯西从定义变量开始给出了函数的定义,同时指出函数不一定要有解析表达式.1837 年狄利克雷认为怎样去建立 x 与 y 之间的关系无关紧要,他拓展了函数概念,指出:“对于在某区间上的每一个确定的 x 值, y 都有一个确定的值,那么 y 叫做 x 的函数.”

• 教学片段 3

(带领学生通过 PPT 了解函数概念的发展与形

成的第三阶段:集合的对应说)

狄利克雷的函数定义出色地避免了以往各种函数定义中所有的关于依赖关系的描述,更加简明、精确,并呈现完全清晰的方式.至此,我们可以说,函数概念、函数的本质定义已经形成,这就是人们常说的经典函数定义,也就是同学们初中学习的函数定义.但是我们进入高中学习了集合,那能不能用集合语言来描述这三个情境中的共同特征?

学生再次深思,教师根据学生的讨论适时地提出以下几个问题:

问题 1 能否用集合语言来描述这两个变量呢?

问题 2 怎样用集合语言来描述这种对应关系?这种对应关系存在什么规律呢?

问题 3 结合刚才所概括的函数本质,能否给出函数的概念?

问题 4 $y=1(x \in \mathbf{R})$ 是函数吗?

生:是函数,此时 $A=\mathbf{R}, B=\{1\}$, 对于集合 A 中每一个元素 x , 在集合 B 中都有唯一的元素 1 和它对应.

师:说得很好.在康托创立集合论之后,维布伦(Veblen)第一次用“集合”与“对应”的概念为近代函数定义,通过集合的概念把函数的三要素具体化,打破了“变量是数”的限制^[3].

设计意图 在函数概念的引入中,通过具体实例使学生体会对应关系.这里考虑到学生的认知基础,从已经掌握的具体函数出发,结合生活经历引发学生思考,逐步构建函数的一般概念.

3 教学中如何体现数学本质

3.1 寻根究源,从数学文化中感悟知识的本质

课标倡导让学生发现、探索、学习新的知识,但与此同时,介绍有关的背景文化(如上述介绍函数概念的发展历史),让学生欣赏数学家的探索经历,从这些过程中感受数学家们的执著、反复与严谨,这将会带给学生情感、态度和价值观上的变化.另外,数学文化中蕴含的数学理性精神的追求,正是对数学本质孜孜不倦追求的体现,如本案例中函数概念从变量说向对应说的探索过程就是数学家不断追求数学本质的漫长过程,学生在这样的过程中将感悟到数学知识是不断严谨化的思维成果,也更可能触及函数概念的本质.

3.2 基于实际,从具体情境中抽象出数学本质

数学的高度抽象性是数学的本质特征,正是这样的特征使得多数学生不易理解数学,产生学习的

畏惧感.在概念教学中,增加“使学生感受数学与现实生活的联系”,使他们有更多的机会从身边熟悉的实例中学习数学概念和理解数学知识,感受到数学的价值.更重要的是,学生通过对实例的研究,经历观察、归纳、概括等重要的数学抽象过程,通过实例的具象共性看到知识的深刻本质,具体化、生活化的案例降低了数学的抽象程度,降低了数学教学的起点和难度,增强了学生学习数学的信心和乐趣.

3.3 强调生成,在理性探究中理解数学本质

新课标强调知识的生成,只有经历整个知识的探究(学习)过程才能理解数学的本质,才能将概念的过程形态转变为对象形态稳定在头脑中.本节课经历了以下过程:

(1)用问题引出与初中函数概念“变量说”的认知冲突,引发学生思考.为了形成新概念,选择所考察的经验材料要能够帮助学生概括概念的内涵.

(2)三个具体实例(表、关系式、图象)实际是函数概念的三个不同的表征形式,既与初中学习的函数表示方法相联系,又打破了初中学习的局限,学生在这过程中很好地完成了函数概念的迁移.

(3)通过实例抽象数学概念,为了降低难度,引导学生用集合语言来阐述它们的共同特点,让学生了解函数是数集之间的一种特殊的对应关系,并引导学生体会初、高中函数的定义,发现其本质一样,不同的是初中突出变化,高中突出对应.

(4)经历“一次次地提出概念、一次次地推翻概念”的探究过程,让学生对函数概念的发展、内涵与外延认识得更加深刻.让学生自主建构概念发生的线路图,帮助学生了解概念的来龙去脉,经历知识发生发展的过程,完善其数学认知结构,促进对核心概念的整体理解.

总之,一节真正好的数学课,应该跳出题海,回归本源,让学生真真切切地在设计的数学活动中感受数学的本质,理解数学的本质^[4].

参考文献

- [1] 傅赢芳,喻平.从数学本质出发设计课堂教学——基于数学核心素养的视域[J].教育理论与实践,2019(20):41-43.
- [2] 袁三红.关于初中“函数概念”的教学研究[D].武汉:华中师范大学,2006.
- [3] 张红霞.教育科学研究方法[M].北京:教育科学出版社,2009.
- [4] 陈云平.数学教学应是数学本质的教学[J].中学数学教学参考,2005(10):12-14.