

1. 已知函数 $f(x) = \frac{a - e^x}{x} + a \ln x$, $a \in \mathbf{R}$.

- (1) 若 $a < e$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
- (2) 若 $a > e$, 求证: 函数 $f(x)$ 有且仅有 1 个零点.