

2021 届石家庄市高中毕业班教学质量检测（一）

数学答案

一、单选：

1. B 2. A 3. B 4. C 5. C 6. D 7. D 8. A

二、多选：

9. AD 10. ACD 11. BC 12. BD

三、填空题

13. 0.77 14. $y^2 = x, \frac{3}{4}$ (满足 $0 < p < 1$ 的答案均给分)

15. $\frac{2\sqrt{15}}{5}$ 16. $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

四、解答题：（每题仅给出一种或两种答案，其他种情况，请各校教研组参照给分标准，商定给分）

17. 解：（Ⅰ）由 a_1, a_2, a_5 成等比数列可得 $a_2^2 = a_1 \cdot a_5$,2 分

即 $(1+d)^2 = 1 \times (1+4d)$, 解得 $d = 2$ 或 $d = 0$ (舍),3 分

$\therefore a_n = 2n-1$,4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $a_n \cdot b_n = (2n-1) \times 2^{n-1}$

所以 $T_n = 1 \times 2^0 + 3 \times 2^1 + 5 \times 2^2 + \cdots + (2n-1) \times 2^{n-1}$,6 分

$\therefore 2T_n = 1 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + \cdots + (2n-3) \times 2^{n-1} + (2n-1) \times 2^n$,

两式相减得 $-T_n = 2^0 + 2 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + \cdots + 2 \times 2^{n-1} - (2n-1) \times 2^n$ 8 分

$$= 1 + 2 \times \frac{2 \times (1-2^{n-1})}{1-2} - (2n-1) \times 2^n = 1 - 4 + 2 \times 2^n - (2n-1) \times 2^n = -3 + (3-2n) \times 2^n$$

$\therefore T_n = 3 + (2n-3) \times 2^n$10 分

18. 解：（Ⅰ）由 $\sqrt{3}c = b(\sin A + \sqrt{3} \cos A)$ 得 $\sqrt{3} \sin C = \sin B \sin A + \sqrt{3} \sin B \cos A$,

.....2 分

$\therefore \sqrt{3} \sin(A+B) = \sin B \sin A + \sqrt{3} \sin B \cos A$

$\therefore \sqrt{3} \sin A \cos B + \sqrt{3} \cos A \sin B = \sin B \sin A + \sqrt{3} \sin B \cos A$ 4 分

所以 $\sqrt{3} \sin A \cos B = \sin A \sin B$, $\therefore \tan B = \sqrt{3}$, $\because B \in (0, \pi)$, $\therefore B = \frac{\pi}{3}$.

.....6 分

(II) 法一: $\because a + c = 2, \therefore c = 2 - a$,

$$\therefore b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$= a^2 + c^2 - ac$$

.....8 分

$$= a^2 + (2 - a)^2 - a(2 - a) = 3a^2 - 6a + 4 = 3(a - 1)^2 + 1$$

.....10 分

$$\because a \in (0, 2) \therefore b^2 \in [1, 4) \therefore b \in [1, 2). \text{12 分}$$

法二:

$$\therefore b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$= a^2 + c^2 - ac$$

.....8 分

$$= (a + c)^2 - 3ac = 4 - 3ac \geq 4 - 3\left(\frac{a + c}{2}\right)^2 = 1 \text{ (当且仅当 } a = c \text{ 时取等号)10 分}$$

又 $b < a + c = 2$,

$$\therefore b \in [1, 2) \text{12 分}$$

19. 解: (I) 由图可知, 图①几何体的为半径为 R 的半球,

图②几何体为底面半径和高都为 R 的圆柱中挖掉了一个圆锥,

与图①截面面积相等的图形是圆环 (如阴影部分),
(因此处为学生自己画图, 可能不够标准, 只要意思对即给分)2 分

证明如下:

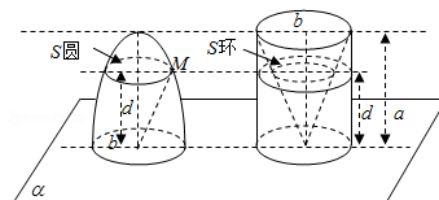
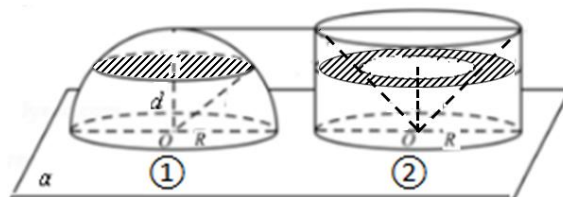
在图①中, 设截面圆的圆心为 O_1 , 易得截面圆 O_1 的面积为 $\pi(R^2 - d^2)$,3 分

在图②中, 截面截圆锥得到的小圆的半径为 d , 所以, 圆环的面积为 $\pi(R^2 - d^2)$,

所以, 截得的截面的面积相等.....5 分

(II) 类比 (I) 可知, 椭圆的长半轴为 a , 短半轴为 b , 构造两个底

面半径为 b , 高为 a 的圆柱, 把半椭球与圆柱放在同一个平面上 (如图), 在圆柱内挖去一个以圆柱下底面圆心为顶点, 圆柱上底面为底



面的圆锥，即挖去的圆锥底面半径为 b ，高为 a ；

.....6 分

在半椭球截面圆的面积为 $\pi \frac{b^2}{a^2} (a^2 - d^2)$ ，

在圆柱内圆环的面积为 $\pi b^2 - \pi \frac{b^2}{a^2} d^2 = \pi \frac{b^2}{a^2} (a^2 - d^2)$ 8 分

$\therefore$ 距离平面 α 为 d 的平面截取两个几何体的平面面积相等，

根据祖暅原理得出椭球 A 的体积为：

$$V_A = 2(V_{\text{圆柱}} - V_{\text{圆锥}}) = 2\left(\pi \cdot b^2 \cdot a - \frac{1}{3} \pi \cdot b^2 \cdot a\right) = \frac{4\pi}{3} ab^2, \text{9 分}$$

同理：椭球 B 的体积为 $V_B = \frac{4\pi}{3} a^2 b$ 11 分

所以，两个椭球 A, B 的体积之比为 $\frac{b}{a}$ 12 分

20. 解：（I）设前 24 分钟比赛甲胜出分别为 $A_i (i=1, 2, 3)$ ，乙胜出分别为 $B_i (i=1, 2, 3)$ ，

在“FAST5”模式每局比赛甲获胜为 C ，4 局比赛决出胜负记为事件 D 。

$$P(D) = P(A_1 A_2 C C + A_1 A_2 A_3 C + B_1 B_2 \bar{C} \bar{C} + B_1 B_2 B_3 \bar{C}) \text{2 分}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{36}; \text{4 分}$$

（II） X 的可能取值为 4、5、6、76 分

$$P(X=4) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6};$$

$$P(X=5) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_3^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_3^1 \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4};$$

$$P(X=6) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_3^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{3} C_2^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_3^1 \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$+ \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_3^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{2}{3} C_2^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_3^1 \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{24};$$

$$P(X=7) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + C_3^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{3} C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + C_3^1 \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^2 C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + C_3^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{2}{3} C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + C_3^1 \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^2 C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{7}{24};$$

所以，随机变量 X 的概率分布列为：

X	4	5	6	7
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{7}{24}$

.....10 分

（每种情况 1 分）

$$X \text{ 的数学期望为 } EX = 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{4} + 6 \times \frac{7}{24} + 7 \times \frac{7}{24} = \frac{137}{24}. \quad \text{.....12 分}$$

$$e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{3} \quad \text{且} \quad \frac{|bc|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = b = \sqrt{2} \quad \text{.....2 分}$$

21.解：（I）由已知

$$\text{即 } a^2 = 1, b^2 = 2, \text{ 所以双曲线的方程为 } x^2 - \frac{y^2}{2} = 1; \quad \text{..... 4 分}$$

$$\text{（II）设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 且由已知得 } x_0^2 - \frac{y_0^2}{2} = 1$$

$$\text{联立 } \begin{cases} x_0 x - \frac{y_0 y}{2} = 1 \\ y = \sqrt{2}x \end{cases} \quad \text{解得: } \begin{cases} x_1 = \frac{1}{x_0 - \frac{\sqrt{2}y_0}{2}} \\ y_1 = \sqrt{2}x_1 \end{cases}, \text{ 所以 } y_1 = \sqrt{2}x_1;$$

$$\text{联立 } \begin{cases} x_0 x - \frac{y_0 y}{2} = 1 \\ y = -\sqrt{2}x \end{cases} \quad \text{解得: } \begin{cases} x_2 = \frac{1}{x_0 + \frac{\sqrt{2}y_0}{2}} \\ y_2 = -\sqrt{2}x_2 \end{cases}, \text{ 所以 } y_2 = -\sqrt{2}x_2;$$

.....6 分

法一：

设 $\triangle AOB$ 的外心 $M(x, y)$ ，则由 $|MA| = |MO| = |MB|$ 得：

$$(x - x_1)^2 + (y - \sqrt{2}x_1)^2 = x^2 + y^2 = (x - x_2)^2 + (y + \sqrt{2}x_2)^2 \quad \text{.....8 分}$$

$$\text{即 } xx_1 + \sqrt{2}yx_1 = \frac{3}{2}x_1^2 \Rightarrow x + \sqrt{2}y = \frac{3}{2}x_1, \quad xx_2 - \sqrt{2}yx_2 = \frac{3}{2}x_2^2 \Rightarrow x - \sqrt{2}y = \frac{3}{2}x_2$$

$$\text{两式相乘得 } x^2 - 2y^2 = \frac{9}{4}x_1x_2 \quad \text{.....10 分}$$

$$\because x_1 x_2 = \frac{1}{x_0 - \frac{\sqrt{2}y_0}{2}} \cdot \frac{1}{x_0 + \frac{\sqrt{2}y_0}{2}} = \frac{1}{x_0^2 - \frac{y_0^2}{2}} = 1$$

又

所以 $\triangle AOB$ 的外心 M 的轨迹方程为 $x^2 - 2y^2 = \frac{9}{4}$;12 分

法二：设 $\triangle AOB$ 的外心 $M(x, y)$,

线段 OA 的中垂线方程为: $y - \frac{y_1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{x_1}{2})$, 线段 OB 的中垂线方程为: $y - \frac{y_2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{x_2}{2})$,

联立 $\begin{cases} y - \frac{y_1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{x_1}{2}) \\ y - \frac{y_2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{x_2}{2}) \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = \frac{3}{4}(x_1 + x_2) \\ y = \frac{3\sqrt{2}}{8}(x_1 - x_2) \end{cases}$ 8 分

$$\because x_1 + x_2 = \frac{1}{x_0 - \frac{\sqrt{2}y_0}{2}} + \frac{1}{x_0 + \frac{\sqrt{2}y_0}{2}} = \frac{2x_0}{x_0^2 - \frac{y_0^2}{2}} = 2x_0,$$

$$x_1 - x_2 = \frac{1}{x_0 - \frac{\sqrt{2}y_0}{2}} - \frac{1}{x_0 + \frac{\sqrt{2}y_0}{2}} = \frac{\sqrt{2}y_0}{x_0^2 - \frac{y_0^2}{2}} = \sqrt{2}y_0$$
10 分

即 $\begin{cases} x = \frac{3}{4}(x_1 + x_2) = \frac{3}{2}x_0 \\ y = \frac{3\sqrt{2}}{8}(x_1 - x_2) = \frac{3}{4}y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{2}{3}x \\ y_0 = \frac{4}{3}y \end{cases}$,

代入 $x_0^2 - \frac{y_0^2}{2} = 1$ 得 $\frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{9}y^2 = 1$

所以 $\triangle AOB$ 的外心 M 的轨迹方程为 $x^2 - 2y^2 = \frac{9}{4}$;12 分

22.解: (I) 设 $f(x) = \frac{-x \sin x}{\cos x}$, $x \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right]$

$$f'(x) = \frac{-(\sin x + x \cos x) \cos x - (-x \sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} = -\frac{\sin x \cos x + x}{\cos^2 x} = -\frac{\sin 2x + 2x}{2 \cos^2 x}$$

.....2 分

$\because \sin 2x + 2x \geq -1 + 2x > 0 \therefore f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 单调递减 3 分

$$\text{即 } x = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{-x \sin x}{\cos x} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi, \quad x = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{-x \sin x}{\cos x} = \frac{3\pi}{4};$$

$$\text{即 } a \text{ 的取值范围为 } a \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi \right]; \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(\text{II}) \text{ 由已知 } g'(x) = (a+1)\cos x - (\cos x - x \sin x) = a \cos x + x \sin x,$$

$$g''(x) = -a \sin x + \sin x + x \cos x = x \cos x - (a-1) \sin x,$$

$$\text{当 } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right] \text{ 时, } g''(x) < 0 \text{ 即 } g'(x) \text{ 单调递减};$$

$$\text{又 } \because g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0, g'(\pi) = -a < 0, \text{ 由零点存在性定理必存在唯一 } x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ 满足 } g'(x_0) = 0,$$

$$\text{当 } x \in \left(\frac{\pi}{2}, x_0\right) \text{ 时, } g'(x) > 0 \text{ 即 } g(x) \text{ 单调递增}; \text{ 当 } x \in x_0, \pi \text{ 时, } g'(x) < 0 \text{ 即 } g(x) \text{ 单调递减};$$

..... 7 分

$$\text{由 } a \cos x_0 + x_0 \sin x_0 = 0 \Rightarrow a = \frac{-x_0 \sin x_0}{\cos x_0}, x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

得

$$G(a) = g(x)_{\max} = g(x_0) = (a+1) \sin x_0 - x_0 \cos x_0 = \left(1 - \frac{x_0 \sin x_0}{\cos x_0}\right) \sin x_0 - x_0 \cos x_0 = \sin x_0 - \frac{x_0}{\cos x_0}$$

.....9 分

$$\text{由第 (I) 问可知函数 } f(x) = \frac{-x \sin x}{\cos x}, x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ 单调递减, 即当 } a \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi\right] \text{ 时, } x_0 \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right];$$

.....10 分

$$\text{设 } H(x) = \sin x - \frac{x}{\cos x}, x \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right]$$

$$\begin{aligned} H'(x) &= \cos x - \frac{\cos x - x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos x(\cos^2 x - 1) - x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x(-\sin^2 x) - x \sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{-\sin x(\sin x \cos x + x)}{\cos^2 x} = \frac{-\sin x(\sin 2x + 2x)}{2\cos^2 x} < 0 \end{aligned}$$

$$\text{所以 } H(x) \text{ 单调递减, } H(x)_{\min} = H\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4} \pi,$$

综上：函数 $g(x)$ 的最大值 $G(a)$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4}\pi$ ； 12 分

微信公众号：新课标试卷--江苏高考群：788940559