

江苏省仪征中学 2020—2021 学年度第一学期高二数学

周末练习（12）

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的．请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上．

- 命题“存在一个无理数，它的平方是有理数”的否定是（ ）
 A. 任意一个有理数，它的平方是有理数 B. 存在一个有理数，它的平方是有理数
 C. 任意一个无理数，它的平方不是有理数 D. 存在一个无理数，它的平方不是有理数
- 在 1, 2, 3, ..., 2020 这 2020 个自然数中，将能被 2 除余 1，且被 3 除余 1 的数按从小到大的次序排成一列，构成数列 $\{a_n\}$ ，则 $a_{50} =$ （ ）

A. 289 B. 295 C. 301 D. 307

- 已知椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{m^2} = 1$ ($m > 0$) 的左焦点为 $F(-4, 0)$ ，则 $m =$ （ ）

A. 2 B. 3 C. 4 D. 9

- 一个等比数列前 n 项的和为 48，前 $2n$ 项的和为 60，则前 $3n$ 项的和为（ ）

A. 83 B. 75 C. 63 D. 36

- 如图 1 是第七届国际数学教育大会（简称 ICME-7）的会徽图案，会徽的主体图案是由如图 2 的一连串直角三角形演化而成的，其中 $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_7A_8 = 1$ ，如果把

图 2 中的直角三角形继续作下去，记 $OA_1, OA_2, \dots, OA_n, \dots$ 的长度构成数列 $\{a_n\}$ ，则此数列的通项公式为（ ）

A. $a_n = n, n \in N^*$

B. $a_n = \sqrt{n+1}, n \in N^*$

C. $a_n = \sqrt{n}, n \in N^*$

D. $a_n = n^2, n \in N^*$



图1

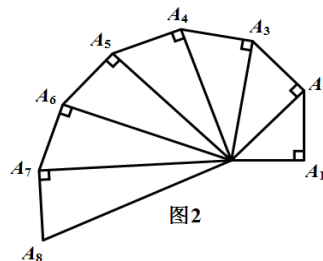


图2

- 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左右焦点分别为 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ ，若椭圆上存在点 P ，使 $PF_1 = 3PF_2$ ，则该椭圆离心率的取值范围为（ ）

A. $(0, \frac{1}{2})$

B. $(0, \frac{1}{2}]$

C. $[\frac{1}{2}, 1)$

D. $(\frac{1}{2}, 1)$

- 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的焦点为 F_1, F_2 ，其渐近线上横坐标为 $\frac{1}{2}$ 的点 P

满足 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$ ，则 $a =$ （ ）

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{2}$

C. 2

D. 4

8. 几位大学生响应国家的创业号召，开发了一款应用软件．为激发大家学习数学的兴趣，他们推出了“解数学题获取软件激活码”的活动．这款软件的激活码为下面数学问题的答案：已知数列 $1, 1, 2, 1, 2, 4, 1, 2, 4, 8, 1, 2, 4, 8, 16, \dots$ ，其中第一项是 2^0 ，接下来的两项是 $2^0, 2^1$ ，再接下来的三项是 $2^0, 2^1, 2^2$ ，依此类推．求满足如下条件的最小整数 N ： $N > 55$ 且该数列的前 N 项和为 2 的整数幂．那么该款软件的激活码是（ ）

- A. 95 B. 105 C. 115 D. 125

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分．每小题给出的四个选项中，都有多个选项是正确的，全部选对的得 5 分，选对但不全的得 3 分，选错或不答的得 0 分．请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上．

9. 已知 a, b 均为实数，则下列说法不一定成立的是（ ）

- A. 若 $a > b, c > d$ ，则 $ab > cd$ B. 若 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ，则 $a < b$
C. 若 $a > b$ ，则 $a^2 > b^2$ D. 若 $|a| < b$ ，则 $a + b > 0$

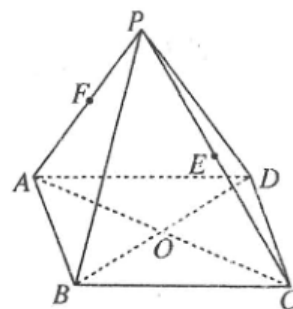
10. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列， $a_1 = 1, a_3 = 2\sqrt{2} + 1$ ，前 n 项和为 S_n ，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{S_n}{n}$ ．则下列说法正确的是

- A. 数列 $\{b_n\}$ 为等差数列 B. 数列 $\{2^{a_n}\}$ 与 $\{2^{b_n}\}$ 均为等比数列
C. 数列 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 为单调递减数列 D. 数列 $\{a_n\}$ 中的任意三项均不能构成等比数列

11. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形， $AD = 4, \angle BAD = \frac{\pi}{3}$ ，面 $PAD \perp$ 面 $ABCD$ ， $\triangle PAD$ 为等腰直角三角形，且 $\angle APD = \frac{\pi}{2}$ ， AC 与 BD 交于点 O ， E 为 PC 的中点， F 在直线

PA 上，若 $\frac{PF}{PA} = \lambda$ ，则下列说法正确的有（ ）

- A. 异面直线 PO 与 AD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$
B. 当 $\lambda = \frac{1}{3}$ 时，平面 $OEF \perp$ 平面 DEF
C. 点 D 到平面 OEF 的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
D. 存在 λ ，使得 $DF \perp PB$



12. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 ，点 P 为椭圆 C 上一动点，则下列说法中正确的是（ ）

- A. PF_1 的取值范围是 $[1, 3]$ B. 存在点 P ，使 $PF_1 \perp PF_2$
C. 曲线 $\frac{x^2}{2} + m|y| = 1 (m \in \mathbf{R})$ 与椭圆 C 都关于原点对称
D. 曲线 $\frac{x^2}{4} + \frac{|y|}{3} = 1$ 与椭圆 C 均位于直线 $x = \pm 2$ 和 $y = \pm\sqrt{3}$ 所围成的矩形内

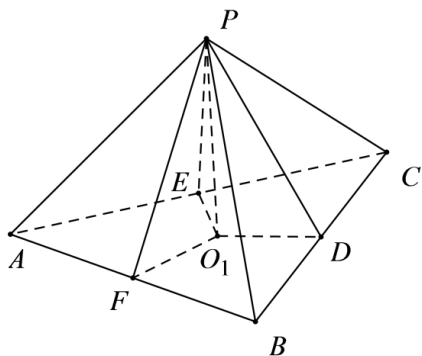
三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分．请把答案填写在答题卡相应位置上．

13. 已知抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上横坐标为 1 的点到焦点的距离为 $\frac{5}{2}$ ，则 $p =$ ▲ ．

14. 已知 $p: 1 \leq x \leq 2$ ， $q: a \leq x \leq a+2$ ．若 p 是 q 的充分条件，则实数 a 的取值范围是 ▲ ．

15. 已知 $a > 0$ ， $b > 0$ ， $a+2b=1$ ，且 $\frac{b}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值是 M ，则 $M =$ ▲ ；若“ $\forall x \in [m, +\infty), x^2 \geq M$ ”是真命题，则实数 m 的取值范围是 ▲ ．

16. 已知三棱锥 $P-ABC$ 中， PA, PB, PC 两两垂直，且 $PA=PB=PC=1$ ，以 P 为球心， $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为半径的球面与该三棱锥表面的交线的长度之和为 ▲ ．



四、解答题：本大题共 6 小题，共计 70 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. 在① $q=d$ ② $q \cdot d=4$ ③ $q+d=4$ 这三个条件中选择一个补充在下面的问题中，并求解．
 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ($d \in \mathbf{N}^*$)，前 n 项和为 S_n ，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ．已知 $b_1 = a_1$ ， $b_2 = 2$ ， ， $S_{10} = 100$ ．

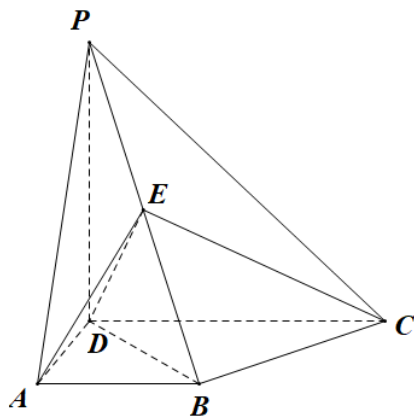
(1) 请写出你的选择，并求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n ．

18. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为直角梯形， $AB \parallel CD$ ， $AD \perp CD$ ， $AB=AD=1$ ， $CD=2$ ， $PD \perp$ 平面 $ABCD$ ．

(1) 求证： $BC \perp$ 平面 PBD ；

(2) 已知 $PD=2$ ，点 E 为棱 PB 中点，求直线 AE 与平面 DCE 所成角的正弦值．



19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = \frac{3}{4}$ ，且满足 $a_{n+1} = \frac{3a_n}{2a_n + 1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$)．

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n = 2 \cdot 3^n (1 - a_n)(1 - a_{n+1})$ ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，求证： $\frac{3}{20} \leq S_n < \frac{1}{4}$ ．

20. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 短轴的两个顶点与右焦点的连线构成等边三角形，

直线 $3x + 4y + 6 = 0$ 与圆 $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ 相切.

(1) 求椭圆 C 的方程;

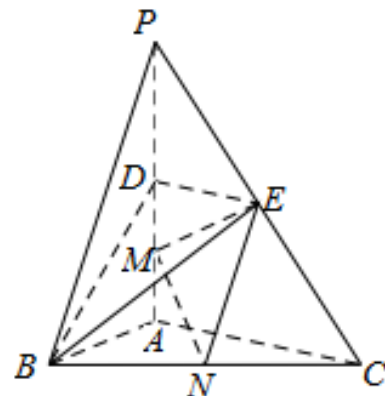
(2) 已知过椭圆 C 的左顶点 A 的两条直线 l_1, l_2 分别交椭圆 C 于 M, N 两点, 且 $l_1 \perp l_2$, 求证: 直线 MN 过定点, 并求出定点坐标.

21. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 底面 ABC , $\angle BAC = 90^\circ$. 点 D, E, N 分别为棱 PA, PC, BC 的中点, M 是线段 AD 的中点, $PA = AC = 4, AB = 2$.

(1) 求证: $MN \parallel$ 平面 BDE ;

(2) 求二面角 $C-EM-N$ 的正弦值;

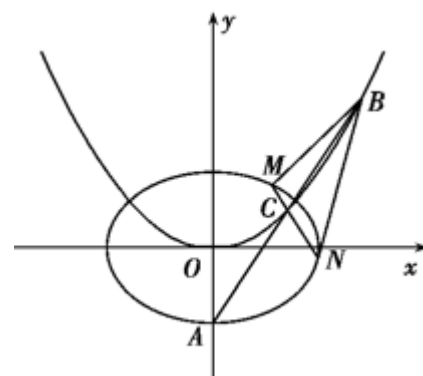
(3) 已知点 H 在棱 PA 上, 且直线 NH 与直线 BE 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$, 求线段 AH 的长.



22. 如图, A 为椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的下顶点, 过点 A 的直线 l 交抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 于 B, C 两点, C 是 AB 的中点.

(1) 求证: 点 C 的纵坐标是定值;

(2) 过点 C 作与直线 l 倾斜角互补的直线 l' 交椭圆于 M, N 两点. 问: p 为何值时, $\triangle BMN$ 的面积最大? 并求面积的最大值.



周末练习 (12) 参考答案

1-8 CBBC CCBA

9.ABC

10.ABD

11.AD

12.AC

13.

3

14. $0 \leq a \leq 1$

15. 4

$m \geq 2$

16. $\left(\frac{9\sqrt{2} + 4\sqrt{6}}{12} \right) \pi$

【解析】根据已知可以判定球面与该三棱锥表面的交线是各侧面内以 P 为圆心，以 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为半径的 3 个四分之一圆弧和底面正三角形 ABC 的内切圆，进而计算求解.

【详解】如图所示，设 BD, CA, AB 的中点分别为 D, E, F , P 在平面 ABC 内的射影为 O_1 ，由已知可得 O_1 为底面正三角形 ABC 的中心.

$\because PA, PB, PC$ 两两垂直，且 $PA = PB = PC = 1$,

$$\therefore AB = BC = CA = \sqrt{2}, \therefore PD = PE = PF = \frac{\sqrt{2}}{2}, O_1D = O_1E = O_1F = \frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

以 P 为球心， $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为半径的球面与该三棱锥表面的交线是各侧面内以 P 为圆心，以 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为半径的 3 个四分之一圆弧和底面正三角形 ABC 的内切圆，

$$\therefore \text{交线的长度之和为 } 3 \times \frac{\pi}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi \times \frac{\sqrt{6}}{6} = \left(\frac{9\sqrt{2} + 4\sqrt{6}}{12} \right) \pi,$$

$$\text{故答案为: } \left(\frac{9\sqrt{2} + 4\sqrt{6}}{12} \right) \pi.$$

【点睛】本题关键是分析几何体的形状特征，利用球的性质，判定截线的类型和形状. 注意到三棱锥是正三棱锥，斜高恰好是球的半径，从而得到截线的形状.

$$17. \text{【答案】解 (1) 选① 由题意有, } \begin{cases} 10a_1 + 45d = 100 \\ b_1q = 2 \\ b_1 = a_1 \\ q = d(d \in \mathbf{N}^*) \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 2a_1 + 9d = 20 \\ a_1d = 2(d \in \mathbf{N}^*) \end{cases} \dots\dots\dots 2$$

分

$$\text{解得 } \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases} \text{ 故 } \begin{cases} a_n = 2n - 1 \\ b_n = 2^{n-1} \end{cases} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{选② 由题意有, } \begin{cases} 10a_1 + 45d = 100 \\ b_1q = 2 \\ b_1 = a_1 \\ qd = 4 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 2a_1 + 9d = 20 \\ a_1 \frac{4}{d} = 2 \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases} \text{ 故 } \begin{cases} a_n = 2n - 1 \\ b_n = 2^{n-1} \end{cases} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{选③ 由题意有, } \begin{cases} 10a_1 + 45d = 100 \\ b_1q = 2 \\ b_1 = a_1 \\ q + d = 4(d \in \mathbf{N}^*) \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 2a_1 + 9d = 20 \\ a_1(4 - d) = 2(d \in \mathbf{N}^*) \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases} \text{ 故 } \begin{cases} a_n = 2n - 1 \\ b_n = 2^{n-1} \end{cases} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 由 $a_n = 2n-1$, $b_n = 2^{n-1}$, 故 $c_n = \frac{2n-1}{2^{n-1}}$, 于是

$$T_n = 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \frac{9}{2^4} + \cdots + \frac{2n-1}{2^{n-1}}, \quad ①$$

$$\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \frac{9}{2^5} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}. \quad ② \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$① - ② \text{ 可得 } \frac{1}{2}T_n = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n} = 3 - \frac{2n+3}{2^n}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{故 } T_n = 6 - \frac{2n+3}{2^{n-1}}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

18. 【答案】解: (1) 证明: $\because AB \parallel CD$, $AD \perp CD$, $\therefore \angle DAB = 90^\circ$

$$\therefore AB = AD = 1, \therefore BD = \sqrt{2}$$

在底面 $ABCD$ 中, 过 B 作 $BF \perp CD$ 于点 F

$$\therefore \text{四边形 } ABFD \text{ 为矩形}, \therefore DF = 1, CF = 1$$

$$\therefore BC = \sqrt{2}, \therefore BD^2 + BC^2 = 4 = CD^2, \therefore BC \perp BD$$

$$\text{又 } \because PD \perp \text{平面 } ABCD, \therefore PD \perp BC$$

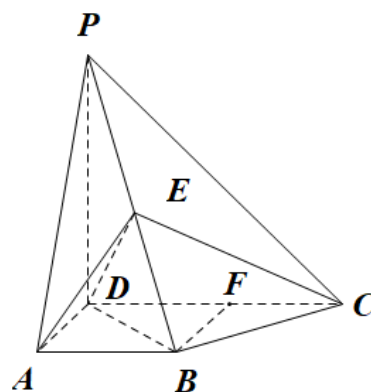
$$\therefore BD \cap PD = D, \therefore BC \perp \text{平面 } PBD$$

$$(2) BD = \sqrt{2}, PB = \sqrt{4+2} = \sqrt{6}$$

$$\because PD \perp \text{平面 } ABCD, \therefore PD \perp AB$$

$$\text{又 } \because AB \perp AD, PD \cap AD = D \therefore AB \perp \text{平面 } PAD, \therefore AB \perp PA$$

$$\because E \text{ 为 } PB \text{ 的中点}, \therefore AE = \frac{1}{2}PB = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ 且 } DE = \frac{\sqrt{6}}{2}$$



$$\text{设 } A \text{ 到平面 } DCE \text{ 的距离为 } h, AE \text{ 与平面 } DCE \text{ 所成角为 } \theta, \therefore \sin \theta = \frac{h}{AE}$$

$$\text{由 } V_{A-DCE} = V_{E-ACD} \Rightarrow \frac{1}{3}S_{\triangle DCE} \cdot h = \frac{1}{3}S_{\triangle ACD} \cdot 1$$

$$\text{而在 } \triangle DCE \text{ 中}, DE = \frac{\sqrt{6}}{2}, CD = 2, CE = \sqrt{BC^2 + BE^2} = \sqrt{2 + \frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$\therefore \cos \angle EDC = \frac{\frac{3}{2} + 4 - \frac{7}{2}}{2 \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times 2} = \frac{\sqrt{6}}{6}, \therefore \sin \angle EDC = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

$$\therefore S_{\triangle DCE} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{30}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{2}, S_{\triangle ACD} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$$

$$\therefore \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{2} h = \frac{1}{3} \times 1 \Rightarrow h = \frac{2\sqrt{5}}{5} \therefore \sin \theta = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{2\sqrt{30}}{15}.$$

所以直线 AE 与平面 DCE 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{30}}{15}$.

【解析】(1) 根据线面垂直的定义得到 $PD \perp BC$, 再根据线段的长度关系得到 $BC \perp BD$, 由此借助线面垂直的判定定理完成证明;

(2) 利用等体积法求解出 A 到平面 DCE 的距离 h , 然后根据 $\frac{h}{AE}$ 的结果得到直线 AE 与

平面 DCE 所成角的正弦值.

方法点睛: 求解线面角的正弦值的两种方法:

(1) 几何法: 通过线面垂直的证明, 找到线面角, 通过长度的比值即可计算线面角的正弦值 (或者通过等体积法求解出线段端点到平面的距离, 根据点到面的距离比上待求线段长度得到线面角的正弦值);

(2) 向量法: 求解出直线的方向向量和平面的法向量, 根据直线的方向向量与平面法向量夹角的余弦值的绝对值等于线面角的正弦值求解出结果.

19. 【答案】解 (1) 因为 $a_{n+1} = \frac{3a_n}{2a_n + 1} (n \in \mathbf{N}^*)$

所以 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3a_n}$, 所以 $\frac{1}{a_{n+1}} - 1 = \frac{1}{3}(\frac{1}{a_n} - 1)$ 2 分

又因为 $\frac{1}{a_1} - 1 = \frac{1}{3}$, 所以 $\{\frac{1}{a_n} - 1\}$ 是以 $\frac{1}{3}$ 为首项, $\frac{1}{3}$ 为公比得等比数列 4 分

所以 $a_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$ 6 分

(2) $b_n = 2 \cdot 3^n (1 - a_n)(1 - a_{n+1}) = 2 \cdot 3^n \cdot \frac{1}{3^n + 1} \cdot \frac{1}{3^{n+1} + 1} = \frac{1}{3^n + 1} - \frac{1}{3^{n+1} + 1}$ 8 分

所以 $S_n = (\frac{1}{3+1} - \frac{1}{3^2+1}) + (\frac{1}{3^2+1} - \frac{1}{3^3+1}) + \dots + (\frac{1}{3^n+1} - \frac{1}{3^{n+1}+1})$

所以 $S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{3^{n+1}+1}$, 10 分

因为 $\{S_n\}$ 单调递增, 所以 $\frac{3}{20} \leq S_n < \frac{1}{4}$ 12 分

20. 【答案】解: (1) 由题意 $\begin{cases} a = 2b \\ \frac{4b+6}{5} = a \end{cases} \therefore \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$ 即 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

(2) $\because A(-2, 0)$ 设 $l_1: x = my - 2, l_2: x = -\frac{1}{m}y - 2$

由 $\begin{cases} x = my - 2 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$ 得 $(m^2 + 4)y^2 - 4my = 0 \therefore M(\frac{2m^2-8}{m^2+4}, \frac{4m}{m^2+4})$

同理: $N(\frac{2-8m^2}{4m^2+1}, -\frac{4m}{4m^2+1})$

i) $m \neq \pm 1$ 时, $k_{MN} = \frac{5m}{4(m^2-1)} l_{MN}: y = \frac{5m}{4(m^2-1)}(x + \frac{6}{5})$ 过定点 $(-\frac{6}{5}, 0)$

ii) $m = \pm 1$ 时 $l_{MN}: x = -\frac{6}{5}$ 过点 $(-\frac{6}{5}, 0) \therefore l_{MN}$ 过定点 $(-\frac{6}{5}, 0)$

【解析】(1) 根据椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 短轴的两个顶点与右焦点的连线构成等边三角形, 直线 $3x + 4y + 6 = 0$ 与圆 $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ 相切, 建立方程组, 求出 a, b , 即可求椭圆 C 的方程;

(2) 由 $\begin{cases} x = my - 2 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$ 得 $(m^2 + 4)y^2 - 4my = 0$, 求出 M 的坐标, 同理可得 N 的坐标, 分类讨论, 即可证明结论; 本题考查了直线与椭圆的位置关系, 联立方程组, 结合韦达定理整体求解, 属于难题.

21. 【答案】(1) 证明: 取 AB 中点 F , 连接 MF, NF ,

$\because M$ 为 AD 中点, $\therefore MF \parallel BD$,

$\because BD \subset$ 平面 $BDE, MF \not\subset$ 平面 $BDE, \therefore MF \parallel$ 平面 BDE .

$\because N$ 为 BC 中点, $\therefore NF \parallel AC$,

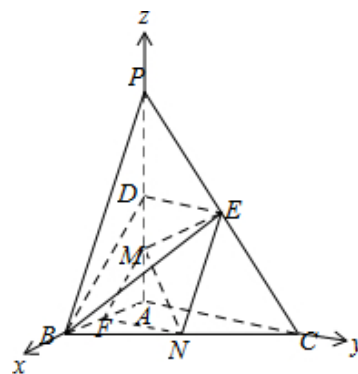
又 D, E 分别为 AP, PC 的中点, $\therefore DE \parallel AC$, 则 $NF \parallel DE$.

$\because DE \subset$ 平面 $BDE, NF \not\subset$ 平面 $BDE, \therefore NF \parallel$ 平面 BDE .

又 $MF \cap NF = F, MF \subset$ 平面 $MFN, NF \subset$ 平面 $MFN, \therefore$ 平面 $MFN \parallel$ 平面 BDE ,

又 $MN \subset$ 平面 MFN , 则 $MN \parallel$ 平面 BDE ;

(2) 解: $\because PA \perp$ 底面 $ABC, \angle BAC = 90^\circ. \therefore$ 以 A 为原点, 分别以



AB、AC、AP 所在直线为 x、y、z 轴建立空间直角坐标系.

$$\because PA = AC = 4, AB = 2,$$

$$\therefore A(0,0,0), B(2,0,0), C(0,4,0), M(0,0,1), N(1,2,0), E(0,2,2),$$

$$\text{则 } \overrightarrow{MN} = (1,2,-1), \overrightarrow{ME} = (0,2,1),$$

设平面 MEN 的一个法向量为 $\vec{m} = (x,y,z)$,

$$\text{由 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{ME} = 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases},$$

$$\text{取 } z = 2, \text{ 得 } \vec{m} = (4,-1,2).$$

由图可得平面 CME 的一个法向量为 $\vec{n} = (1,0,0)$.

$$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{4}{\sqrt{21} \times 1} = \frac{4\sqrt{21}}{21}.$$

由图可知二面角 C-EM-N 的平面角为锐角,

$$\therefore \text{二面角 } C-EM-N \text{ 的余弦值为 } \frac{4\sqrt{21}}{21}, \text{ 则正弦值为 } \frac{\sqrt{105}}{21};$$

$$(3) \text{解: 设 } AH = t, \text{ 则 } H(0,0,t), \overrightarrow{NH} = (-1,-2,t), \overrightarrow{BE} = (-2,2,2).$$

$$\therefore \text{直线 } NH \text{ 与直线 } BE \text{ 所成角的余弦值为 } \frac{\sqrt{7}}{7},$$

$$\therefore |\cos \langle \overrightarrow{NH}, \overrightarrow{BE} \rangle| = \left| \frac{\overrightarrow{NH} \cdot \overrightarrow{BE}}{|\overrightarrow{NH}| |\overrightarrow{BE}|} \right| = \left| \frac{2t-2}{\sqrt{5+t^2} \times 2\sqrt{3}} \right| = \frac{\sqrt{7}}{7}. \text{ 解得: } t = 4.$$

$$\therefore \text{当 } H \text{ 与 } P \text{ 重合时直线 } NH \text{ 与直线 } BE \text{ 所成角的余弦值为 } \frac{\sqrt{7}}{7}, \text{ 此时线段 } AH \text{ 的长为 } 4.$$

【解析】 本题考查直线与平面平行的判定,考查了利用空间向量求解空间角,考查计算能力,是中档题.

(1) 取 AB 中点 F, 连接 MF、NF, 由已知可证 MF//平面 BDE, NF//平面 BDE. 得到平面 MFN//平面 BDE, 则 MN//平面 BDE;

(2) 由 PA ⊥ 底面 ABC, ∠BAC = 90°. 可以 A 为原点, 分别以 AB、AC、AP 所在直线为 x、y、z 轴建立空间直角坐标系. 求出平面 MEN 与平面 CME 的一个法向量, 由两法向量所成角的余弦值得二面角 C-EM-N 的余弦值, 进一步求得正弦值;

(3) 设 AH = t, 则 H(0,0,t), 求出 $\overrightarrow{NH}, \overrightarrow{BE}$ 的坐标, 结合直线 NH 与直线 BE 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$, 列式求得线段 AH 的长.

$$22. \text{【答案】解: (1) 易知 } A(0,-1), \text{ 不妨设 } B\left(t, \frac{t^2}{2p}\right), \text{ 则 } C\left(\frac{t}{2}, \frac{t^2-2p}{4p}\right),$$

$$\text{代入抛物线方程得: } \left(\frac{t}{2}\right)^2 = 2p \cdot \frac{t^2-2p}{4p}, \text{ 得: } t^2 = 4p,$$

$$\therefore y_C = \frac{4p-2p}{4p} = \frac{1}{2} \text{ 为定值.}$$

$$(2) \because \text{点 } C \text{ 是 } AB \text{ 的中点, } S_{\triangle BMN} = S_{\triangle AMN},$$

$$\text{设直线 } l \text{ 的斜率为 } k, \text{ 则 } k = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{t}{2}}, \text{ 所以直线 } l' \text{ 的斜率为 } k' = -\frac{3}{t},$$

$$\therefore \text{直线 } l' \text{ 的方程为 } y - \frac{1}{2} = -\frac{3}{t}\left(x - \frac{t}{2}\right), \text{ 即 } y = -\frac{3}{t}x + 2,$$

$$\text{不妨记 } m = -\frac{3}{t}, \text{ 则 } l': y = mx + 2,$$

$$\text{代入椭圆方程并整理得 } (2m^2 + 1)x^2 + 8mx + 6 = 0,$$

$$\text{设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), \text{ 则 } x_1 + x_2 = -\frac{8m}{2m^2+1}, x_1 x_2 = \frac{6}{2m^2+1}$$

$$|MN| = \sqrt{1+m^2} |x_1 - x_2| = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+m^2} \cdot \frac{\sqrt{2m^2-3}}{2m^2+1},$$

$$\text{点 } A \text{ 到直线 } l' \text{ 的距离 } d = \frac{3}{\sqrt{m^2+1}},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} |MN| \cdot d = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2m^2-3}}{2m^2+1} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2m^2-3} + \frac{4}{\sqrt{2m^2-3}}} \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{当且仅当 } \sqrt{2m^2-3} = \frac{4}{\sqrt{2m^2-3}} \text{ 时取等号,}$$

$$\text{解得 } m^2 = \frac{7}{2}, \text{ 所以 } t^2 = \frac{9}{m^2} = \frac{18}{7}, \text{ 从而 } p = \frac{t^2}{4} = \frac{9}{14}$$

$$\text{故当 } p = \frac{9}{14} \text{ 时, } \triangle BMN \text{ 的面积最大.}$$

