高三数学测试（二）

（全卷满分 150 分，考试时间 120 分钟）

一、单选题（本大题共 8 小题，共 40.0 分）

1. 已知集合$A=\{x||x|\leq 2,x\in N\}$，集合$B=\{x|x^2+x-6=0\}$，则$A\cap B=(\quad)$

A. $\{2\}$　　B. $\{-3,2\}$　　C. $\{-3,1\}$　　D. $\{-3,0，1，2\}$

2. 已知 p：$sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$q$：$cos2\alpha=\frac{1}{3}$，则 p 是 q 的$(\quad)$

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 已知直线$y=x+b$是曲线$y=f(x)=lnx$的切线，则 b 的值等于$(\quad)$

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

4. 在空间中，a、b 是两条不同的直线，α、β是两个不同的平面，则下列判断正确的是$(\quad)$

A. 若$a//b$，$a//\alpha$，则$b//\alpha$

B. 若$\alpha\perp\beta$，$\alpha\perp\beta$，则$a//\alpha$

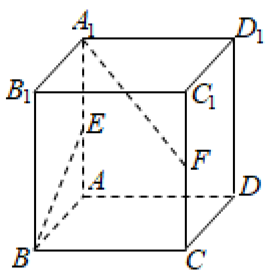
C. 若$a\perp b$，$a\perp\alpha$，$b\perp\beta$，则$\alpha\perp\beta$

D. 若$a//\alpha$，$\alpha\perp\beta$，则$a\perp\beta$

5. 《九章算术》是我国古代数学成就的杰出代表，其中《方田》章有弧田面积计算问题，计算术曰：以弦乘矢，矢又自乘，并之，二而一.其大意是，弧田面积计算公式为：弧田面积$=\frac{1}{2}\cdot(弦\times矢+矢\times矢)$，弧田是由圆弧(简称为弧田弧)和以圆弧的两端为顶点的线段(简称为弧田弦)围成的平面图形，公式中“弦”指的是弧田弦的长，“矢”等于弧田弧所在圆的半径与圆心到弧田弦的距离之差.现有一弧田，其弦长 AB 等于 6 米，其弧所在圆为圆 O，若用上述弧田面积计算公式算得该弧田的面积为$\frac{7}{2}$平方米，则$\cos\angle AOB=(\quad)$

A. $\frac{7}{25}$　　B. $\frac{3}{25}$　　C. $\frac{12}{25}$　　D. $\frac{2}{25}$

6. 如图，在棱长为 2 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E，F 分别是棱AA_1，CC_1的中点，过 BE 的平面α与直线A_1F平行，则平面α截该正方体所得截面的面积为$(\quad)$



A. $\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{5}$　　C. 4　　D. 5

7. 已知$\sin(\theta-\frac{\pi}{12})=\frac{1}{3}$，则$\sin(2\theta+\frac{\pi}{3})=(\quad)$

A. $-\frac{2}{9}$　　B. $\frac{2}{9}$　　C. $-\frac{7}{9}$　　D. $\frac{7}{9}$

8. 已知$a>1$，$b>1$，且$\frac{e^a}{a}=\frac{e^{b+1}+1}{b+1}$，则下列结论一定正确的是(　)

A. $\ln(a+b)>2$　　B. $\ln(a-b)>0$　　C. $2^{a+1}<2^b$　　D. $2^a+2^b<2^3$

二、多选题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

9. 已知定义在 R 上的函数$f(x)=cos\omega x(\omega>0)$在区间$(-\frac{\pi}{3},0)$上是单调增函数，则(　)

A. $f(|x|)$的最小正周期为$\frac{\pi}{\omega}$

B. $f(x)$在区间$(0,\frac{\pi}{3})$上是单调减函数

C. ω的最大值为 3

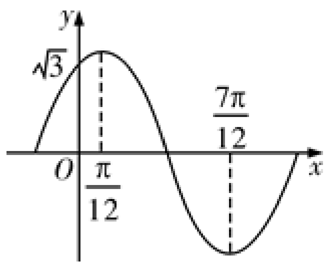
D. $f(\frac{5\pi}{12})\leq f(\frac{\pi}{4})$

10. 已知$a>0$，$b>0$，且$a+2b=1$，则(　)

A. 2^a+4^b的最大值为$2\sqrt{2}$　　B. $\log_2 a+\log_2 b$的最大值为-3

C. $\frac{1}{a}+\frac{2a}{b}$的最小值为 5　　D. a^2+4b^2的最小值为 2

11. 已知函数$f(x)=Asin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$的部分图象如图所示，其中图象最高点和最低点的横坐标分别为$\frac{\pi}{12}$和$\frac{7\pi}{12}$，图象在 y 轴上的截距为$\sqrt{3}$，给出下列结论，其中正确的是(　)



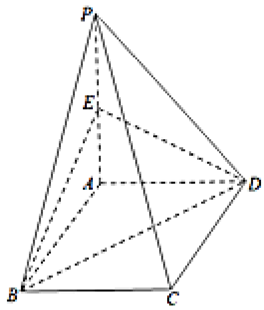
A. $f(x)$的最小正周期为2π

B. $f(x)$的最大值为 2

C. $f(\frac{\pi}{4})=1$

D. $f(x-\frac{\pi}{6})$为偶函数

12. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面 $ABCD$ 是正方形，$PA\perp$底面 $ABCD$，$PA=AB$，截面 BDE 与直线 PC 平行，与 PA 交于点 E，则下列判断正确的是(　)



A. E 为 PA 的中点

B. PB 与 CD 所成的角为$\frac{\pi}{3}$

C. 平面$BDE\perp$平面 PAC

D. 点 P 与点 A 到平面 BDE 的距离相等

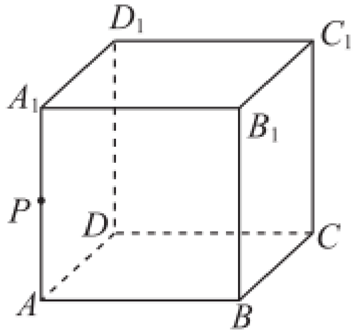
三、填空题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

13. 函数$f(x)=x+2cosx$在$(0,2\pi)$上的单调递减区间为______.

14. 已知$f(x)$是定义在 R 上的奇函数，满足$f(1-x)=f(1+x)$.若$f(1)=1$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2021)=$______.

15. 化简：$\frac{1}{cos80^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{sin80^\circ}=$______.

16. 如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为2，P是AA_1的中点，Q是侧面正方形BB_1C_1C内的动点，当$D_1Q//$平面 PBD 时，点 Q 的轨迹长度为______ ，若点 Q 轨迹的两端点和点C_1，D_1在球 O 的球面上，则球 O 的体积为______ .



四、解答题（本大题共 6 小题，共 70.0 分）

17. 已知函数$f(x)=4sin(\pi-x)\cos(x-\frac{\pi}{3})-\sqrt{3}$.

(1)求$f(x)$的对称中心坐标：

(2)若$f(x)-3m+2\leq 0$有解，求 m 的最小值.

18. 定义在 R 上的增函数$y=f(x)$对任意 x，$y\in R$都有$f(x+y)=f(x)+f(y)$，则

(1)求$f(0)$；

(2)证明：$f(x)$为奇函数；

(3)若$f(k\cdot 3^x)+f(3^x-9^x-2)<0$对任意$x\in R$恒成立，求实数 k 的取值范围.

19. 在①$asin(A+C)=bsin\frac{B+C}{2}$，②$1+\cos^2A=\cos^2B+\cos^2C+sinBsinC$两个条件中任选一个，补充到下面问题中，并解答．在$\triangle ABC$中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知______.

(1)求 A；

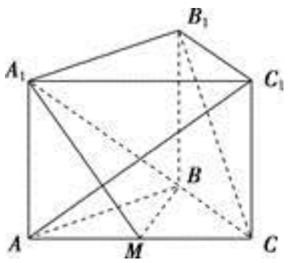
(2)已知函数$f(x)=\frac{1}{2}\cos(4x-A)$，$x\in[0,\frac{\pi}{4}]$，求$f(x)$的最小值.

20. 已知函数$f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2+ax+1$

(1)当$a=2$时，求曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程；

(2)若函数$f(x)$在$x=1$处有极小值，求函数$f(x)$在区间$[-2,\frac{3}{2}]$上的最大值.

21. 如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，侧棱$AA_1\perp$底面ABC，M为棱AC的中点.$AB=BC$，$AC=2$，$AA_1=\sqrt{2}$.



(1)求证：$B_1C//$平面A_1BM；

(2)求证：$AC_1\perp$平面A_1BM；

(3)在棱BB_1上是否存在点N，使得平面$AC_1N\perp$平面AA_1C_1C？如果存在，求此时$\frac{BN}{BB_1}$的值；如果不存在，请说明理由.

22. 已知函数$f(x)=lnx-ax(a\in R)$.

(1)讨论函数$f(x)$的单调性；

(2)证明不等式$e^{x-2}-ax\geq f(x)$恒成立.

答案和解析

1.【答案】A

【解析】

【分析】

本题考查了描述法和列举法的定义，交集及其运算，考查了计算能力，属于基础题.

可求出集合 A，B，然后进行交集的运算即可.

【解答】

解：$\because A=\{x|-2\le x\le 2,x\in N\}=\{0,1，2\}$，$B=\{-3,2\}$，

$\therefore A\cap B=\{2\}$.

故选：A.

2.【答案】A

【解析】解：由$cos2\alpha=\frac{1}{3}=1-2sin^2\alpha$，解得$sin\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，

则 p 是 q 的充分不必要条件.

故选：A.

由$cos2\alpha=\frac{1}{3}=1-2sin^2\alpha$，解得$sin\alpha$，即可判断出结论.

本题考查了倍角公式、三角函数求值、简易逻辑的判定方法，考查了推理能力与计算能力，属于基础题.

3.【答案】A

【解析】解：由$f(x)=lnx$，得$f'(x)=\frac{1}{x}$，

设切点坐标为(x_0,y_0)，则$\frac{1}{x_0}=1$，即$x_0=1$，

$\therefore y_0=lnx_0=ln1=0$，则切点为$(1,0)$，

代入$y=x+b$，有$0=1+b$，即$b=-1$.

故选：A.

求出原函数的导函数，设出切点坐标(x_0,y_0)，由$x=x_0$处的导数值为 1 求得切点横坐标，进一步求得切点纵坐标，把切点坐标代入切线方程，即可求得 b 值.

本题考查利用导数研究过曲线上某点处的切线方程，设切点是关键，是基础题.

4.【答案】C

【解析】

【分析】

本题考查空间线线、线面和面面的位置关系，主要是平行和垂直的判定和性质，考查空间想象能力、逻辑推理能力，属于中档题.

由线面的位置关系可判断 A；由线面和面面的位置关系可判断 B；由面面垂直的定义，可判断 C；由线面的位置关系可判断 D.

【解答】

解：若$a//b$，$a//\alpha$，则$b\subset\alpha$或$b//\alpha$，故 A 错误；

若$a\perp\beta$，$\alpha\perp\beta$，则$a//\alpha$或$a\subset\alpha$，故 B 错误；

若$a\perp b$，$a\perp\alpha$，$b\perp\beta$，可将 a，b 平移至相交直线，

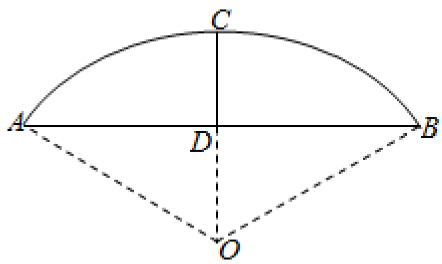
设它们确定的平面与α、β的交线分别为a'，b'，由线面垂直的性质可a'，b'所成角为$90°$，由面面垂直的定义，则$\alpha\perp\beta$，故 C 正确；

若$a//\alpha$，$\alpha\perp\beta$，则a与β相交或$a//\beta$或$a\subset\beta$，故 D 错误.

故选：C.

5.【答案】A

【解析】解：如图，由题意可得：$AB=6$，



弧田面积$S=\frac{1}{2}$(弦×矢+矢^2)$=\frac{1}{2}\times$(6×矢+矢^2)$=\frac{7}{2}$平方米.

解得矢$=1$，或矢$=-7$(舍)，

设半径为 r，圆心到弧田弦的距离为 d，

则$\begin{cases}r-d=1\\r^2=9+d^2\end{cases}$，解得$d=4$，$r=5$，

$\therefore\cos\angle AOD=\frac{d}{r}=\frac{4}{5}$，

$\therefore\cos\angle AOB=2cos^2\angle AOD-1=\frac{32}{25}-1=\frac{7}{25}$.

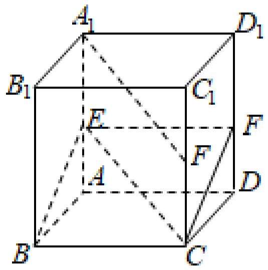
故选：A.

由弧田面积求出矢$=1$，设半径为r，圆心到弧田弦的距离为d，列出方程组求出$d=4$，$r=5$，从而得到$\cos\angle AOD=\frac{d}{r}=\frac{4}{5}$，再由$\cos\angle AOB=2cos^2\angle AOD-1$，能求出结果．

本题考查角的余弦值的求法，考查同角三角函数关系式、二倍角公式、弧田面积计算公式，考查推理论证能力、运算求解能力，考查转化化归思想，是中档题．

6.【答案】B

【解析】解：在棱长为 2 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E，F分别是棱AA_1，CC_1的中点，



∵过 BE 的平面α与直线A_1F平行，又$CE//A_1F$，

∴平面α是平面 BEC，

取DD_1中点 F，连结 CF，EF，则$CF//BE$，

∴平面α截该正方体所得截面为矩形 $BCFE$，

∵ $BC=2$，$CF=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，$BC\perp CF$，

∴平面α截该正方体所得截面的面积为$S_{矩形BCFE}=2\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$.

故选：B.

由过 BE 的平面α与直线A_1F平行，$CE//A_1F$，得平面α是平面 BEC，取DD_1中点 F，连结 CF，EF，则$CF//BE$，从而平面α截该正方体所得截面为矩形 $BCFE$，由此能求出平面α截该正方体所得截面的面积．

本题考查平面截正方体所得平面面积的求法，考查线面平行的判定定理、线面平行的判定定理等基础知识，考查运算求解能力，是中档题．

7.【答案】D

【解析】解: $\sin(2\theta+\frac{\pi}{3})=\sin(2\theta-\frac{\pi}{6}+\frac{\theta}{2})=\cos(2\theta-\frac{\pi}{6})=1-2\sin^2(\theta-\frac{\pi}{12})=1-2\times\frac{1}{9}=\frac{7}{9}$,

故选：D.

由题意利用诱导公式、二倍角公式，计算求得要求式子的值．

本题主要考查诱导公式、二倍角公式的应用，属于中档题．

8.【答案】B

【解析】解：令$f(x)=\frac{e^x}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$，

可得$x>1$时，函数$f(x)$单调递增，

$\because a>1$，$b>1$，且$\frac{e^a}{a}=\frac{e^{b+1}+1}{b+1}=\frac{e^{b+1}}{b+1}+\frac{1}{b+1}$，，

$\therefore \frac{e^a}{a}-\frac{e^{b+1}}{b+1}=\frac{1}{b+1}\in(0,\frac{1}{2})$，

$\therefore a>b+1$，

$\therefore Ln(a-b)>0$，因此B正确；

$\therefore \ln(a+b)>\ln(2b+1)>ln3$，$\ln(a+b)>2$不一定成立，因此$A$不正确；

$2^{a+1}>2^{b+2}>2^b$，因此C不正确；

$2^a+2^b>2^{b+1}+2^b=3\times2^b$.因此$2^a+2^b<2^3$不一定成立，因此不正确.

故选：B.

令$f(x)=\frac{e^x}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，利用导数研究函数的单调性即可判断出结论.

本题考查了利用导数研究函数的单调性、不等式的性质、指数与对数函数的单调性，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.

9.【答案】BC

【解析】解：$\because$函数$f(x)=cos\omega x(\omega>0)$在区间$(-\frac{\pi}{3},0)$上是单调增函数，

$\therefore \omega\cdot(-\frac{\pi}{3})\geq-\pi$，$\therefore \omega\leq3$.

$\because f(|x|)=f(x)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{\omega}$，故A错误；

在区间$(0,\frac{\pi}{3})$上，$\omega x\in(0,\frac{\omega\pi}{3})$，$\frac{\omega\pi}{3}\leq\pi$，故$f(x)$在区间$(0,\frac{\pi}{3})$上是单调减函数，故$B$正确；

由以上$\omega\leq3$，可得ω的最大值为3，故C正确；

$\because f(x)$在区间$(0,\frac{\pi}{3})$上是单调减函数，$\frac{\pi}{4}$属于此区间，而$\frac{5\pi}{12}$不属于此区间，

故不能判断$f(\frac{5\pi}{12})$与$f(\frac{\pi}{4})$的大小关系，故D错误，

故选：BC.

由题意利用余弦函数的单调性和周期性，逐一判断各个选项是否正确，从而得出结论.

本题主要考查余弦函数的单调性和周期性，属于中档题．

10.【答案】BC

【解析】解：因为$2^a>0$，$4^b>0$，所以：$2^a+4^b\geq 2\sqrt{2^a4^b}=2\sqrt{2^{a+2b}}=2\sqrt{2}$，

当且仅当$2^a=4^b$时等号成立，此时$\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=\frac{1}{4}\end{cases}$，而$2^a+4^b$有最小值是$2\sqrt{2}$，故$A$错误；

因为$a>0$，$b>0$，所以$a+2b\geq 2\sqrt{2ab}$，整理得：$ab\leq\frac{1}{8}$(当且仅当$a=2b$时等号成立)；

又因为$log_2^a+log_2^b=\log_2 ab\leq log_2\frac{1}{8}=-3$(当且仅当$a=2b$时等号成立)，所以$\log_2 a+\log_2 b$的最大值为$-3$，故$B$正确；

$\frac{1}{a}+\frac{2a}{b}=\frac{a+2b}{a}+\frac{2a}{b}=\frac{2(a^2+b^2)}{ab}+1$，

因为$a^2+b^2\geq 2ab$，所以$\frac{2(a^2+b^2)}{ab}+1\geq\frac{4ab}{ab}+1=5$(当且仅当$\frac{1}{a}=\frac{2a}{b}$时等号成立)故$C$正确；

$a^2+4b^2\geq 2a\cdot 2b=4ab$(当且仅当$a=2b$，即：$a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{4}$时等号成立)，

则$a^2+4b^2\geq\frac{1}{2}$，故其最小值是$\frac{1}{2}$，故D错误．

故选：BC．

利用重要不等式，基本不等式求最值，注意等号成立的条件．

本题考查了基本不等式在求最值方面的应用，属于基础题．

11.【答案】BC

【解析】解：根据函数$f(x)=Asin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$的部分图象，可得$\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}$，求得$\omega=2$．

再根据五点法作图可得$2\times\frac{\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}$，求得$\varphi=\frac{\pi}{3}$．

再根据图象经过点$(0,\sqrt{3})$，可得$Asin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，$\therefore A=2$，$f(x)=2sin(2x+\frac{\pi}{3})$．

故$f(x)$的最小正周期为π，故A错误；

显然，$f(x)$的最大值为2，故B正确；

$f(\frac{\pi}{4})=2sin\frac{5\pi}{6}=1$，故$C$正确；

$f(x-\frac{\pi}{6})=2sin2x$，为奇函数，故 D 错误，

故选：BC．

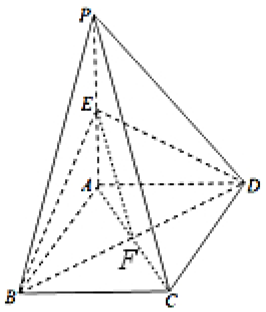
由周期求ω，由五点法作图求出φ的值，由特殊点的坐标求出 A，再利用三角函数的图象和性质，得出结论．

本题主要考查由函数$y=Asin(\omega x+\varphi)$的部分图象求解析式，由周期求ω，由五点法作图求出φ的值，由特殊点的坐标求出 A，三角函数的性质，属于中档题．

12.【答案】ACD

【解析】解：对于 A，连结 AC，交 BD 于点 F，连结 EF，则平面$PAC\cap$平面$BDE=EF$，

$\because PC//$平面 BDE，$EF\subset$平面 BDE，$PC\subset$平面 PAC，$\therefore EF//PC$，



$\because$四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore AF=FC$，$\therefore AE=EP$，选项 A 正确；

对于 B，$\because CD//AB$，$\therefore \angle PBA$(或其补角)为 PB 与 CD 所成角，

$\because PA\perp$平面 $ABCD$，$AB\subset$平面 $ABCD$，$\therefore PA\perp AB$，

在$Rt\triangle PAB$中，$PA=AB$，$\therefore \angle PAB=\frac{\pi}{4}$,

$\therefore PB$与 CD 所成角为$\frac{\pi}{4}$，选项 B 错误；

对于 C，$\because$四边形 $ABCD$ 为正方形，$\therefore AC\perp BD$，

$\because PA\perp$平面 $ABCD$，$BD\subset$平面 $ABCD$，$\therefore PA\perp BD$，

$\because PA\cap AC=A$，$\therefore BD\perp$平面 PAC，

又$BD\subset$平面 BDE，$\therefore$平面$BDE\perp$平面 PAC，选项 C 正确；

对于 D，则$V_{三棱锥A-BDE}=V_{三棱锥P-BDE}=\frac{1}{2}V_{三棱锥P-ABD}$，

所以点 P 与点 A 到平面 BDE 的距离相等，选项 D 正确．

故选：ACD．

A 中，连结 AC，交 BD 于点 F，连结 EF，推导出$EF//PC$，可得 E 为 PA 的中点；

B 中，由$CD//AB$，得$\angle PBA$(或其补角)为 PB 与 CD 所成角，求出角的大小即可；

C 中，推导出$BD\perp$平面 PAC，得出平面$BDE\perp$平面 PAC；

D 中，由$V_{三棱锥A-BDE}=V_{三棱锥P-BDE}$，得出点 P 与点 A 到平面 BDE 的距离相等.

本题考查了命题真假的判断问题，也考查了空间中线线、线面、面面间的位置关系应用问题，是中档题.

13.【答案】$(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$

【解析】解：$\because$函数$y=x+2cosx$，

$\therefore y'=1-2sinx<0$，

$\therefore sinx>\frac{1}{2}$，

又$\because x\in(0,2\pi)$，

$\therefore x\in(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$，

故答案为：$(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$.

先求导数，因为是求减区间，则让导数小于零求解即可.

本题主要考查用导数法求函数的单调区间.

14.【答案】1

【解析】解：根据题意，函数$f(x)$满足$f(1+x)=f(1-x)$，变形可得$f(-x)=f(2+x)$，

又由$f(x)$是定义在 R 上的奇函数，即$f(-x)=-f(x)$，

则有$f(x+2)=-f(x)$，即$f(x+4)=f(x)$，即函数$f(x)$是周期为 4 的周期函数，

若$f(x+2)=-f(x)$，则有$f(1)+f(3)=0$，$f(2)+f(4)=0$，

则在一个周期内$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0$，

故 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2021)=[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]\times505+f(1)=1$，

故答案为：1

根据题意，分析可得$f(x+2)=-f(x)$，进而可得函数$f(x)$是周期为 4 的周期函数，据此分析可得$f(1)+f(3)=0$，$f(2)+f(4)=0$，即可得$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0$，据此可得 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2021)=[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]\times505+f(1)=f(1)$，即可得答案.

本题考查函数的奇偶性的性质以及应用，涉及函数的周期性，属于基础题.

15.【答案】4

【解析】解：由$\frac{1}{cos80^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{sin80^\circ}=\frac{sin80^\circ-\sqrt{3}cos80^\circ}{sin80^\circ cos80^\circ}=\frac{2sin(80^\circ-60^\circ)}{\frac{1}{2}sin160^\circ}=\frac{4sin20^\circ}{\sin(180^\circ-20^\circ)}=4$.

故答案为4.

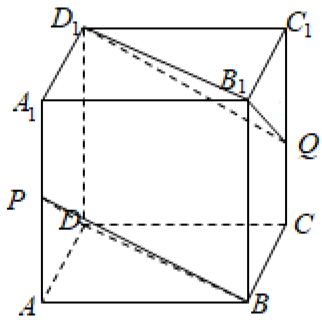
通分，根据二倍角公式，利用两角和与差的公式求解即可.

本题主要考察了二倍角公式，两角和与差的公式的应用，属于基本知识的考查.

16.【答案】$\sqrt{5}\,\frac{9\pi}{2}$

【解析】解：依题意，$D_1Q//$平面PBD时，点Q是平面BB_1C_1C内的动点，

可得D_1点与点Q的轨迹构成的平面与平面PBD平行，如图所示，



$\because P$是AA_1的中点，取CC_1的中点Q_0，$\therefore Q$点的轨迹即为线段B_1Q_0.

$\because$正方体的棱长为2，$\therefore B_1Q_0=\sqrt{5}$.

把三棱锥$D_1-B_1C_1Q$补形为长方体，可得球O的直径就是A_1Q_0，长为3.

故球O的体积为$\frac{4}{3}\pi\times(\frac{3}{2})^3=\frac{9\pi}{2}$.

故答案为：$\sqrt{5}$；$\frac{9\pi}{2}$.

由题意画出图形，可得D_1点与点Q的轨迹构成的平面与平面PBD平行，由P是AA_1的中点，取CC_1的中点Q_0，可得Q点的轨迹即为线段B_1Q_0，由已知求得点Q的轨迹长度，然后利用分割补形法可得求O的直径，则球O的体积可求.

本题主要考查空间中的位置关系，轨迹问题以及球的体积的求法，考查空间想象能力与运算求解能力，是中档题.

17.【答案】解：因为$f(x)=4sin(\pi-x)\cos(x-\frac{\pi}{3})-\sqrt{3}$，

$=4sinx(\frac{1}{2}cosx+\frac{\sqrt{3}}{2}sinx)-\sqrt{3}$，

$=2sinxcosx+2\sqrt{3}\sin^2x-\sqrt{3}$，

$=sin2x-\sqrt{3}cos2x$，

$=2sin(2x-\frac{\pi}{3})$，

(1)令$2x-\frac{\pi}{3}=k\pi$得$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$，$k\in Z$，

故函数$f(x)$的对称中心$(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6},0)$，$k\in Z$；

(2)因为$f(x)-3m+2\leq 0$有解，

所以$3m-2\geq f(x)$有解，即$3m-2\geq f(x)_{min}$，

所以$3m-2\geq -2$，

故$m\geq 0$，即 m 的最小值 0.

【解析】(1)先利用诱导公式，和差角公式及辅助角公式对已知函数进行化简，然后结合正弦函数的对称性可求；

(2)由已知转化为$3m-2\geq f(x)$有解，即$3m-2\geq f(x)_{min}$，结合正弦函数的性质可求.

本题主要考查了诱导公式，二倍角公式，辅助角公式在三角化简中的应用，还考查了正弦函数的性质，体现了转化思想的应用，属于中档题.

18.【答案】解：(1)在$f(x+y)=f(x)+f(y)$中，

令$x=y=0$可得，$f(0)=f(0)+f(0)$，

则$f(0)=0$，

(2)令$y=-x$，得$f(x-x)=f(x)+f(-x)$，

又$f(0)=0$，则有$0=f(x)+f(-x)$，

即可证得$f(x)$为奇函数；

(3)因为$f(x)$在 R 上是增函数，又由(2)知$f(x)$是奇函数，

$f(k\cdot 3^x)<-f(3^x-9^x-2)=f(-3^x+9^x+2)$，

即有$k\cdot 3^x<-3^x+9^x+2$，得$k<3^x+\frac{2}{3^x}-1$，

又有$3^x+\frac{2}{3^x}-1\geq 2\sqrt{2}-1$，当且仅当$3^x=\sqrt{2},x=\frac{1}{2}\log_3 2$时取等号，即$3^x+\frac{2}{3^x}-1$有最小值$2\sqrt{2}-1$，

所以要使$f(k\cdot 3^x)+f(3^x-9^x-2)<0$恒成立，只要使$k<2\sqrt{2}-1$即可，

故 k 的取值范围是$(-\infty,2\sqrt{2}-1)$.

【解析】本题考查函数的恒成立问题与抽象函数的应用，关键是用赋值法求出$f(0)$，进而来判断函数的奇偶性.

(1)根据题意，令$x=y=0$可得，$f(0)=f(0)+f(0)$，变形可得$f(0)$，

(2)令$y=-x$，得$f(x-x)=f(x)+f(-x)$，由(1)可得$f(0)=0$，即可得$0=f(x)+f(-x)$，可得证明；

(3)根据题意，由$f(x)$的奇偶性与单调性，可将$f(k\cdot 3^x)+f(3^x-9^x-2)<0$变形为$f(k\cdot 3^x)<f(-3^x+9+2^x)$，进而可得$k<3^x+\frac{2}{3^x}-1$，由基本不等式的性质，可得$3^x+\frac{2}{3^x}-1$有最小值，令 k 小于其最小值即可得 k 的取值范围.

19.【答案】解：(1)若选择①：由正弦定理得$sinBsin\frac{B+C}{2}=sinAsinB$，

因为$0<B<\pi$，所以$sinB\neq 0$，

所以$\sin\frac{B+C}{2}=sinA$，又因为$B+C=\pi-A$，

所以$\cos\frac{A}{2}=2sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$，

因为$0<A<\pi$，$0<\frac{A}{2}<\frac{\pi}{2}$，所以$\cos\frac{A}{2}\neq 0$，

所以$\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$，$\frac{A}{2}=\frac{\pi}{6}$，

所以$A=\frac{\pi}{3}$.

若选择②：$1+\cos^2A=\cos^2B+\cos^2C+sinBsinC$，

可得$1+(1-\sin^2A)=(1-\sin^2B)+(1-\sin^2C)+sinBsinC$，

整理可得$\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A=sinBsinC$，

由正弦定理可得$b^2+c^2-a^2=bc$，

由余弦定理可得$cosA=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$，

因为$A\in(0,\pi)$，

所以$A=\frac{\pi}{3}$.

(2)由(1)知：$A=\frac{\pi}{3}$，可得函数$f(x)=\frac{1}{2}\cos(4x-\frac{\pi}{3})$，

因为$x\in[0,\frac{\pi}{4}]$，

所以$4x-\frac{\pi}{3}\in[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$，可得$\cos(4x-\frac{\pi}{3})\in[-\frac{1}{2},1]$，

所以$f(x)=\frac{1}{2}\cos(4x-\frac{\pi}{3})\in[-\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$，

所以$f(x)$的最小值为$-\frac{1}{4}$.

【解析】本题主要考查了正弦定理，三角函数恒等变换，余弦定理，同角三角函数基本关系式，余弦函数的性质在解三角形中的应用，考查了计算能力和转化思想，属于中档题.

(1)若选择①：由正弦定理，三角函数恒等变换的应用可得$\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$，进而可求$A=\frac{\pi}{3}$.

若选择②：利用同角三角函数基本关系式，正弦定理化简已知等式可得$b^2+c^2-a^2=bc$，由余弦定理可得$cosA=\frac{1}{2}$，结合范围$A\in(0,\pi)$，可求A的值；

(2)由(1)知：$A=\frac{\pi}{3}$，可得函数$f(x)=\frac{1}{2}\cos(4x-\frac{\pi}{3})$，由已知可求范围$4x-\frac{\pi}{3}\in[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$，利用余弦函数的性质即可求解其最小值.

20.【答案】解：(1)当$a=2$时，$f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2+2x+1$，

$f'(x)=3x^2-x+2$，

$\therefore f'(0)=2$，又$f(0)=1$，

$\therefore$曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为$y-1=2x$，即$2x-y+1=0$.

(2)$f'(x)=3x^2-x+a$，

$\because$函数$f(x)$在$x=1$处有极小值，

所以$f'(1)=2+a=0$，

解得$a=-2$，

此时$f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+1$，$f'(x)=3x^2-x-2$，

由$f'(x)=0$，得$x=-\frac{2}{3}$或$x=1$，

当$x<-\frac{2}{3}$或$x>1$时，$f'(x)>0$，

当$-\frac{2}{3}<x<1$时，$f'(x)<0$，

所以$f(x)$在$(-2,-\frac{2}{3})$，$(1,\frac{3}{2})$上是增函数，在$(-\frac{2}{3},1)$上是减函数.

所以$f(1)=-\frac{1}{2}.f(-2)=-5$，

因为$f(-\frac{2}{3})=\frac{49}{27}$，$f(\frac{3}{2})=\frac{1}{4}$，

所以$f(x)$的最大值为因为$f(-\frac{2}{3})=\frac{49}{27}$.

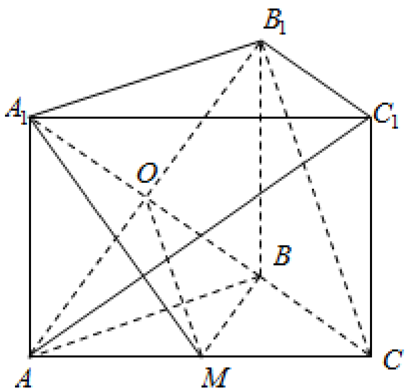
【解析】(1).欲求在点$(0, f(0))$处的切线方程，只须求出其斜率的值即可，故先利用导数求出在$x=0$处的导函数值，再结合导数的几何意义即可求出切线的斜率．从而问题解决．

(2).函数$f(x)$在$x=1$处有极小值，所以$f'(1)=2+a=0$，解得$a=-2$，此时

$f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+1$，通过求导得单调区间得出函数$f(x)$在区间$[-2, \frac{3}{2}]$上的最大值．

本小题主要考查直线的斜率、导数的几何意义、利用导数研究曲线上某点切线方程等知识，解答的关键是导函数的正负与原函数的单调性之间的关系，即当导函数大于 0 时原函数单调递增，当导函数小于 0 时原函数单调递减．

21.【答案】解：(Ⅰ)连结AB_1交A_1B于 O，连结 OM.



在$\triangle B_1AC$中，因为 M，O 分别为 AC，AB_1中点，

所以$OM//B_1C$.

又因为$OM\subset$平面A_1BM，$B_1C\not\subset$平面A_1BM，

所以$B_1C//$平面A_1BM.　...(4分)

(Ⅱ)因为侧棱$AA_1\perp$底面 ABC，$BM\subset$平面 ABC，

所以$AA_1\perp BM$.

又因为 M 为棱 AC 中点，$AB=BC$，所以$BM\perp AC$.

因为$AA_1\cap AC=A$，所以$BM\perp$平面ACC_1A_1.

所以$BM\perp AC_1$.

因为 M 为棱 AC 中点，$AC=2$，所以$AM=1$.

又因为$AA_1=\sqrt{2}$，所以在$Rt\triangle ACC_1$和$Rt\triangle A_1AM$中，$\tan\angle AC_1C=\tan\angle A_1MA=\sqrt{2}$.

所以$\angle AC_1C=\angle A_1MA$，即$\angle AC_1C+\angle C_1AC=\angle A_1MA+\angle C_1AC=90°$.

所以$A_1M\perp AC_1$.

因为$BM\cap A_1M=M$，

所以$AC_1\perp$平面A_1BM.　...(10分)

(Ⅲ)当点 N 为BB_1中点时，即$\frac{BN}{BB_1}=\frac{1}{2}$，平面$AC_1N\perp$平面$AA_1C_1C$.

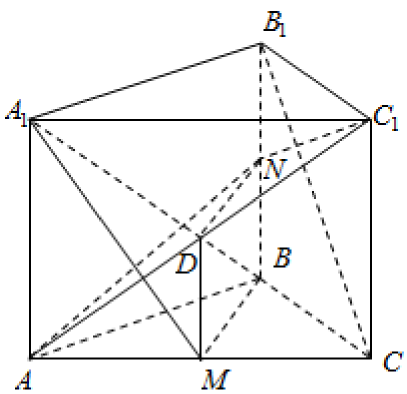
设AC_1中点为 D，连结 DM，DN.

因为 D，M 分别为AC_1，AC 中点，

所以$DM//CC_1$，且$DM=\frac{1}{2}CC_1$.

又因为 N 为BB_1中点，

所以$DM//BN$，且$DM=BN$，



所以四边形 $DMBN$ 是平行四边形，

所以$BM//DN$，

因为$BM\perp$平面ACC_1A_1，

所以$DN\perp$平面ACC_1A_1.

又因为$DN\subset$平面AC_1N，所以平面$AC_1N\perp$平面ACC_1A_1. ...(14分)

【解析】本题主要考查了平面与平面垂直的判定，直线与平面平行的判定，直线与平面垂直的判定，考查了空间想象能力和转化思想，属于中档题.

(Ⅰ)连结AB_1交A_1B于 O，连结 OM，可证$OM//B_1C$，又$OM\subset$平面A_1BM，$B_1C\not\subset$平面A_1BM，即可证明$B_1C//$平面A_1BM.

(Ⅱ)易证$AA_1\perp BM$，又可证$BM\perp AC_1$，由$AC=2$，$AM=1$，$AA_1=\sqrt{2}$，可求$\angle AC_1C+\angle C_1AC=\angle A_1MA+\angle C_1AC=90°$，从而可证$A_1M\perp AC_1$，从而证明$AC_1\perp$平面$A_1BM$.

(Ⅲ)当点 N 为BB_1中点时，可证平面$AC_1N\perp$平面AA_1C_1C，设AC_1中点为 D，连结 DM，DN，可证$BM//DN$，由$BM\perp$平面ACC_1A_1，可证$DN\perp$平面ACC_1A_1，即可证明平面$AC_1N\perp$平面ACC_1A_1.

22.【答案】解：(1)$f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}(x>0)$，

当$a\leq 0$时，$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

当$a>0$时，令$f'(x)=0$，得到$x=\frac{1}{a}$，

所以当$x\in(0,\frac{1}{a})$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

当$x\in(\frac{1}{a},+\infty)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

综上所述，当$a\leq 0$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

当$a>0$时，$f(x)$在$(0,\frac{1}{a})$单调递增，$f(x)$在$(\frac{1}{a},+\infty)$单调递减.

(2)设函数$\varphi(x)=e^{x-2}-lnx$，即证$\varphi(x)\geq 0$恒成立，

则$\varphi'(x)=e^{x-2}-\frac{1}{x}$，

可知$\varphi'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

又由$\varphi'(1)<0$，$\varphi'(2)>0$

所以$\varphi'(x)=0$在$(0,+\infty)$上有唯一实数根x_0，且$1<x_0<2$，

则$\varphi'(x_0)=e^{x_0-2}-\frac{1}{x_0}=0$，即$e^{x_0-2}=\frac{1}{x_0}$，

当$x \in (0, x_0)$时，$\varphi'(x) < 0$，$\varphi(x)$单调递减，

当$x \in (x_0, +\infty)$时，$\varphi'(x) > 0$，$\varphi(x)$单调递增，

所以$\varphi(x) \geq \varphi(x_0) = e^{x_0-2} - lnx_0$，结合$e^{x_0-2} = \frac{1}{x_0}$，知$x_0 - 2 = -lnx_0$，

所以$\varphi(x) \geq \varphi(x_0) = \frac{1}{x_0} + x_0 - 2 = \frac{x_0^2-2x_0+1}{x_0} = \frac{(x_0-1)^2}{x_0} \geq 0$，

则$\varphi(x) = e^{x-2} - lnx \geq 0$，

即不等式$e^{x-2} - ax \geq f(x)$恒成立.

【解析】本题考查导数的应用，不等式的证明，解题中注意分类讨论，转化思想的应用，属于难题.

(1)对$f(x)$求导得$f'(x) = \frac{1-ax}{x}(x > 0)$，分两种情况当$a \leq 0$时，当$a > 0$时，讨论函数$f(x)$的单调性.

(2)要证明不等式$e^{x-2} - ax \geq f(x)$恒成立$\Rightarrow e^{x-2} - lnx \geq 0$恒成立，设函数$\varphi(x) = e^{x-2} - lnx$，只需$\varphi(x)_{min} \geq 0$，即可.