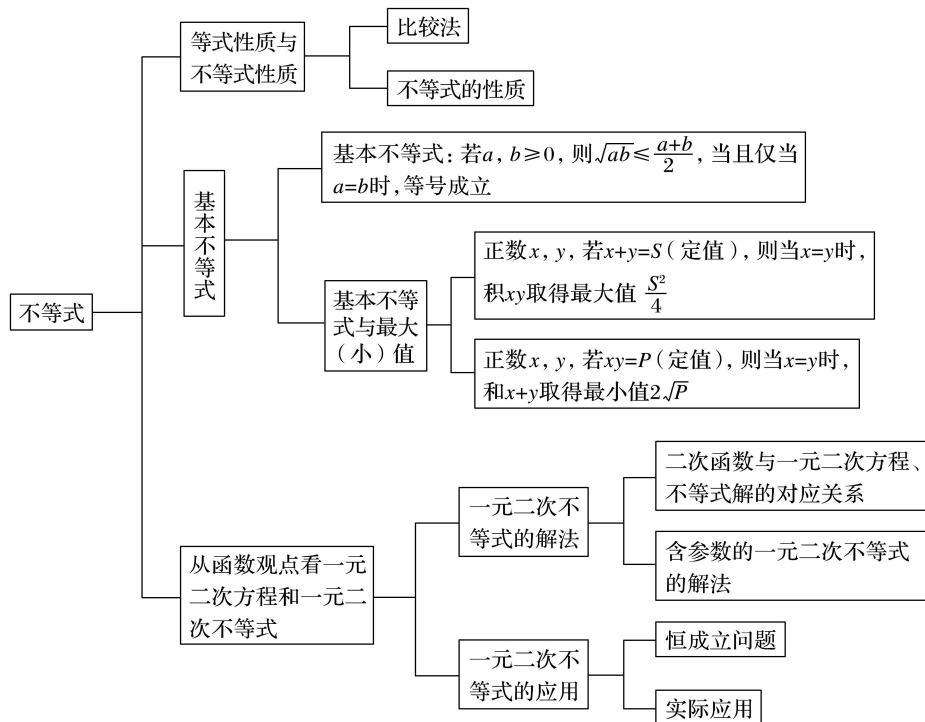


不等式章末复习课(一)

知识网络

理清脉络 纲举目张



(一) 不等式的性质及应用

1. 不等式的性质常用来比较大小、判断与不等式有关的命题的真假和证明不等式, 防止由于考虑不全面出现错误, 有时也可结合特殊值法求解.
2. 通过不等式的性质, 提升数学抽象和逻辑推理素养.

巩固练习 1. 若 $A=a^2+3ab$, $B=4ab-b^2$, 则 A, B 的大小关系是()

- A. $A \leq B$ B. $A \geq B$ C. $A < B$ 或 $A > B$ D. $A > B$

反思感悟 不等式性质的应用方法

- (1) 作差法比较大小的关键是对差式进行变形, 变形的的方法一般是通分、分解因式、配方等.
- (2) 不等式真假的判断, 要依靠其适用范围和条件来确定, 举反例是判断命题为假的一个好方法, 用特例法验证时要注意, 适合的不一定对, 不适合的一定错, 故特例只能否定选择项.

(二) 基本不等式及应用

1. 基本不等式: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} (a>0, b>0)$ 是每年高考的热点, 主要考查命题判断、不等式证明以及求最值问题, 特别是求最值问题往往与实际问题相结合, 同时在基本不等式的使用条件上设置一些问题, 实际上是考查学生恒等变形的技巧, 另外, 基本不等式的和与积的转化在高考中也经常出现.

2. 借助基本不等式的应用, 提升数学抽象和数学运算素养.

巩固练习 2. 若 $0 < x < 2$, 则 $x(2-x)$ 的最大值是()

- A. 2 B. $\frac{3}{2}$ C. 1 D. $\frac{1}{2}$

巩固练习 3. 已知 $x > 0, y > 0$, 且 $x + 3y = 1$, 则 $\frac{x+y}{xy}$ 的最小值是_____.

反思感悟 利用基本不等式求最值的关注点

(1) 注意寻求已知条件与目标函数之间的联系.

(2) 利用添项和拆项的配凑方法, 使积(或和)产生定值. 特别注意“1”的代换.

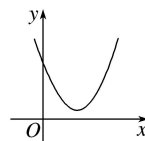
(三) 不等式恒成立、能成立问题

在解决不等式恒成立、能成立的问题时, 常常使用不等式解集法、分离参数法、主参换位法和数形结合法解决, 方法灵活, 能提升学生的逻辑推理、数学运算等素养.

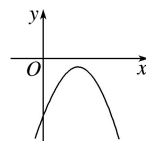
问题探究: (一) “1” 法解决恒成立问题

例 1 (1) 已知不等式 $kx^2 + 2kx - (k+2) < 0$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围;

(2) 若不等式 $-x^2 + 2x + 3 \leq a^2 - 3a$ 对任意实数 x 恒成立, 求实数 a 的取值范围.



图①



图②

反思感悟 (1) 如图①, 一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0 (a \neq 0)$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立 $\Leftrightarrow$ 一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0 (a \neq 0)$ 的解集为 $\mathbf{R} \Leftrightarrow$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象恒在 x 轴上方 $\Leftrightarrow$

$$y_{\min} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ \Delta < 0. \end{cases}$$

(2) 如图②, 一元二次不等式 $ax^2 + bx + c < 0 (a \neq 0)$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立 $\Leftrightarrow$ 一元二次不等式 $ax^2 + bx + c < 0 (a \neq 0)$ 的解集为 $\mathbf{R} \Leftrightarrow$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象恒在 x 轴下方

$$\Leftrightarrow y_{\max} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ \Delta < 0. \end{cases}$$

(二) 数形结合法解决恒成立问题

例 2 当 $1 \leq x \leq 2$ 时, 不等式 $x^2 + mx + 4 < 0$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

反思感悟 结合函数的图象将问题转化为函数图象的对称轴, 端点的函数值或函数图象的位置(相对于 x 轴)关系求解. 可结合相应一元二次方程根的分布解决问题.

(三) 分离参数法解决恒成立问题

例 3 设函数 $y = mx^2 - mx - 1, 1 \leq x \leq 3$, 若 $y < -m + 5$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

反思感悟 通过分离参数将不等式恒成立问题转化为求函数最值问题.

(四) 主参换位法解决恒成立问题

例 4 已知函数 $y = mx^2 - mx - 6 + m$, 若对于 $1 \leq m \leq 3, y < 0$ 恒成立, 求实数 x 的取值范围.

反思感悟 转换思维角度，即把变元与参数变换位置，构造以参数为变量的函数，根据原变量的取值范围求解.

(五) 利用图象解决能成立问题

例 5 当 $1 < x < 2$ 时，关于 x 的不等式 $x^2 + mx + 4 > 0$ 有解，则实数 m 的取值范围为_____.

反思感悟 结合二次函数的图象，将问题转化为端点值的问题解决.

(六) 转化为函数的最值解决能成立问题

例 6 若存在 $x \in \mathbf{R}$ ，使得 $\frac{4x+m}{x^2-2x+3} \geq 2$ 成立，求实数 m 的取值范围.