

三角形中的不等问题

在 $\triangle ABC$ 中, 如果 A, B, C 对应边分别用 a, b, c 表示, 则常见的等式有: $A+B+C=\pi$, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (正弦定理), $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ (余弦定理) 等, 而其中隐藏的不等关系也很多, 如 $0 < A < \pi$, $0 < A+B < \pi$, $|a-b| < c < a+b$, 如果是锐角三角形, 则还有 $0 < A < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < A+B < \pi$, $a^2 + b^2 > c^2$ 等等, 解题中充分利用这些关系, 结合不等式相关性质, 可以求出相关变量或解析式的准确范围.

一、角的范围或最值

【例 1】 $\triangle ABC$, 若 $\frac{\sin A + \sqrt{3}\cos A}{\cos A - \sqrt{3}\sin A} = \tan \frac{5\pi}{6}$, 则 $\sin B \cdot \sin C$ 的最大值为_____.

变式训练: 若 $\triangle ABC$ 的内角满足 $\sin A + \sqrt{2}\sin B = 2\sin C$, 则 $\cos C$ 的最小值是_____.

二、边的范围或最值

【例 2】已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 满足 $\sin 2A + \sin(A-B+C) = \sin(C-A-B) + \frac{1}{2}$, 面积 S 满足 $1 \leq S \leq 2$, 记 a, b, c 分别为 A, B, C 所对的边, 则下列不等式一定成立的是_____.

- (1) $bc(b+c) > 8$ (2) $ac(a+b) > 16\sqrt{2}$ (3) $6 \leq abc \leq 12$ (4) $12 \leq abc \leq 24$

变式训练: 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 BC 边上的高为 $\frac{\sqrt{3}}{6}a$, 则 $\frac{c}{b} + \frac{b}{c}$ 的最大值是_____.

三、周长的范围或最值

【例 3】已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边, $a\cos C + \sqrt{3}a\sin C - b - c = 0$.
 (1) 求 A 的大小;
 (2) 若 $a=7$, 求 $\triangle ABC$ 的周长的取值范围.

变式训练： 设 $\triangle ABC$ 中 $a \cos C - \frac{1}{2}c = b$.

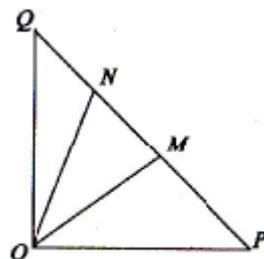
(1)求角 A 的大小； (2)若 $a=1$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长的取值范围.

四、面积的范围与最值

【例 4】 如图，在等腰直角三角形 OPQ 中， $\angle POQ=90^\circ$ ， $OP=2\sqrt{2}$ ，点 M 在线段 PQ 上.

(1)若 $OM = \sqrt{5}$ ，求 PM 的长；

(2)若点 N 在线段 MQ 上，且 $\angle MON=30^\circ$ ，问：当 $\angle POM$ 取何值时， $\triangle OMN$ 的面积最小？并求出面积的最小值.



变式训练： 在 $\triangle ABC$ 中， $a=2$.

(1)若 $A = \frac{\pi}{3}$ ，求 $b+c$ 的取值范围； (2)若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$ ，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

五、与其它知识的综合问题

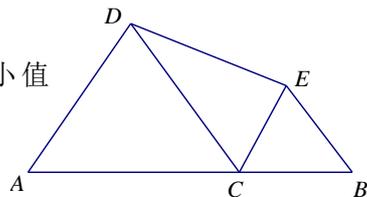
【例 5】 已知 O 为 $\triangle ABC$ 的外心， $\cos A = \frac{1}{3}$ ，若 $\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，则 $x+y$ 的最大值为_____.

变式训练： 在 $\triangle ABC$ 中，记角 A, B, C 的对边为 a, b, c ，角 A 为锐角，设向量 $\vec{m} = (\cos A, \sin A)$ $\vec{n} = (\cos A, \sin A)$ ，且 $\vec{m} \cdot \vec{n} = \frac{1}{2}$.

(1) 求角 A 的大小及向量 \vec{m} 与 \vec{n} 的夹角； (2) 若 $a = \sqrt{5}$ ，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

【迁移运用】

1. 已知 $|AB|=3$, C 是线段 AB 上异于 A, B 的一点, $\triangle ADC, \triangle BCE$ 均为等边三角形, 则 $\triangle CDE$ 的外接圆的半径的最小值是_____.



2. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $2c \cos B = 2a + b$, 若 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{\sqrt{3}}{12}c$, 则 ab 的最小值为_____.

3. $\triangle ABC$, 已知 $c = 2$, 且 $\sin C + \sin(B - A) = 2\sin 2A$, 则 a 的取值范围是_____;

4. $\triangle ABC$ 中, $B = 60^\circ, AC = \sqrt{3}$, 则 $AB + 2BC$ 的最大值为_____.

5. 给出四个命题: (1) 若 $\sin 2A = \sin 2B$, 则 $\triangle ABC$ 为等腰三角形; (2) 若 $\sin A = \cos B$, 则 $\triangle ABC$ 为直角三角形; (3) 若 $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C < 2$, 则 $\triangle ABC$ 为钝角三角形; (4) 若 $\cos(A - B) \cos(B - C) \cos(C - A) = 1$, 则 $\triangle ABC$ 为正三角形. 以上正确命题的是_____.

6. 三角形 ABC , $\sin^2 A \leq \sin^2 B + \sin^2 C - \sin B \sin C$. 则 A 的取值范围是_____.

7. 给出下列四个命题: ①当 $x > 0$ 且 $x \neq 1$ 时, 有 $\ln x + \frac{1}{\ln x} \geq 2$; ② $\triangle ABC$ 中, $\sin A > \sin B$ 当且仅当 $A > B$; ③已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_7 > S_5$, 则 $S_9 > S_3$; ④函数 $y = f(1+x)$ 与函数 $y = f(1-x)$ 的图像关于直线 $x = 1$ 对称. 其中正确命题的序号为_____.

8. 已知 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对边分别为 a, b, c , 若 $1 + \frac{\tan A}{\tan B} = \frac{2c}{b}$, 则 $\frac{a^2}{bc}$ 的最小值为_____.

9. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, $\frac{\cos C}{\cos B} = \frac{2a - c}{b}$, 且 $a + c = 2$.

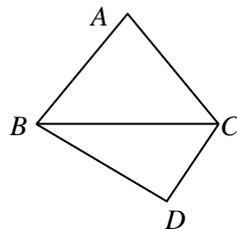
(1) 求角 B ;

(2) 求边长 b 的最小值.

10. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $a = b(\sin C + \cos C)$.

(1) 求 $\angle ABC$;

(2) 若 $\angle A = \frac{\pi}{2}$, D 为 $\triangle ABC$ 外一点, $DB = 2, DC = 1$, 求四边形 $ABDC$ 面积的最大值.



11. 在锐角三角形 ABC 中, $\sqrt{3}a - 2c \sin A = 0$.

- (1) 求角 C 的大小; (2) 若 $c = 2$, 求 $a + b$ 的最大值.

12. $\triangle ABC$ 中, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sqrt{3} \cos B}$,

- (1) 求角 B ; (2) 若 A 是 $\triangle ABC$ 的最大内角, 求 $\cos(B + C) + \sqrt{3} \sin A$ 的取值范围.

13. $\triangle ABC$ 中, 已知点 (a, b) 在直线 $x(\sin A - \sin B) + y \sin B = c \sin C$ 上.

- (1) 求角 C 的大小;

- (2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形且满足 $\frac{m}{\tan C} = \frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B}$, 求实数 m 的最小值.

14. 已知 $\triangle ABC$ 中若 $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C + \sin A \sin B$, $c \cos B = b(1 - \cos C)$.

- (1) 判断 $\triangle ABC$ 的形状;

- (2) 在 $\triangle ABC$ 的边 AB , AC 上分别取 D , E 两点, 使沿线段 DE 折叠三角形时, 顶点 A 正好落在边 BC 上的 P 点处, 设 $\angle BDP = \theta$, 当 AD 最小时, 求 $\frac{|AD|}{|AB|}$ 的值.

