

微专题：双曲线的离心率

一：渐近线

双曲线的范围在以直线 $y = \frac{b}{a}x$ 和 $y = -\frac{b}{a}x$ 为边界的平面区域内，那么从 x, y 的变化趋势看，双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 与直线 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 具有怎样的关系？

两条直线 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 叫做双曲线的_____。

二：离心率

双曲线的焦距与实轴的比 $e = \frac{c}{a}$ 叫做双曲线的离心率，且 e _____，双曲线的离心率越大，它的开口就_____。

双曲线的离心率与渐近线方程之间有着密切的联系，可以借助 $\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}$ 进行互求。一般地，如果已知双曲线离心率的值求渐近线方程，或者已知渐近线方程，求离心率的值，都会有两解（焦点在 x 轴上和焦点在 y 轴上两种情况），不能忘记分类讨论。

三：求双曲线的离心率

1 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，则双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率是()

A. $\frac{5}{4}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{4}$

2. (1) 若双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{4}{3}x$ ，则双曲线的离心率为_____。

(2) 若双曲线的离心率为 2，则两条渐近线的夹角为_____。

3. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的两条渐近线互相垂直，则它的离心率为_____；

4. 中心在原点，焦点在坐标轴上的双曲线的一条渐近线经过点 $(4, -2)$ ，则它的离心率为_____；

5.过双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 的一个焦点 F 引它的一条渐近线的垂线 FM ,垂足为 M ,并且交 y 轴于点 E ,若 M 为 EF 的中点,则该双曲线的离心率为()

- A.2 B. $\sqrt{3}$ C.3 D. $\sqrt{2}$

6.已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 的右焦点为 F ,若过点 F 且倾斜角为 60° 的直线 l 与双曲线的右支有且只有一个交点,则双曲线的离心率 e 的取值范围是_____.

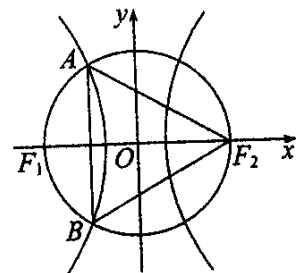
7. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$,若矩形 $ABCD$ 的四个顶点在 E 上, AB, CD 的中点为 E 的两个焦点,且 $2AB=3BC$,则 E 的离心率是_____.

8.已知点 F_1, F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 的左、右焦点,若双曲线左支上存在点 P 与点 F_2 关于直线 $y=\frac{b}{a}x$ 对称,则双曲线的离心率为_____.

9. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} (0 < a < b)$ 的半焦距为 c ，直线 l 过 $(a, 0)$ ， $(0, b)$ 两点，已知原点到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{4}c$ ，求双曲线的离心率。

10. 如图， F_1 和 F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两个焦点， A 、 B 是以 O 为圆心、以 OF_1 为半径的圆与该双曲线左支的两个交点，且 $\triangle F_2AB$ 是等边三角形，求双曲线的离心率。

...



11. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 若双曲线上存在一点 P 使 $\frac{\sin \angle PF_1 F_2}{\sin \angle PF_2 F_1} = \frac{a}{c}$, 则该双曲线的离心率 e 的取值范围是_____.

12. 已知椭圆和双曲线有公共焦点 F_1, F_2 , P 是它们的一个交点, $\angle F_1 P F_2 = 60^\circ$, 记椭圆和双曲线的离心率分别为 e_1 和 e_2 . (1) e_1 与 e_2 互为倒数, 则 $e_1 =$ _____.

(2) 椭圆和双曲线的离心率的倒数之和的最大值为_____.