

巧用简单几何性质求解椭圆试题的优化路径

江苏省海门中学 (226100) 姜敏华

解析几何具有显见的几何性质,选取恰当的“元”及合理的变形对运算影响是巨大的,优化计算路径尤为重要.教学中要借助简单的几何性质来简化运算,优化解题路径,提升学生的数学运算及数学建模的数学核心素养.

问题1 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经

过点 $(\sqrt{2}, 1)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设直线 $l: y = kx + t (t \neq 0)$ 与椭圆 C 相交于 A, B 两点, 若以 OA, OB 为邻边的平行四边形 $OAPB$ 的顶点 P 在椭圆 C 上, 求证: 平行四边形 $OAPB$ 的面积为定值.

分析: 第(1)问易得 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$; 第(2)问中如何用数量关系来刻画平行四边形这一条件, 我们很自然地想到对角线互相平分, 利用这一几何性质与椭圆中的中点弦联系起来, 构建恰当的目标函数, 再借助弦长公式, 面积公式进行减元消元得到定值. 我们还可利用仿射变换将椭圆回归到圆, 转化为定角定长求解菱形的面积, 再将圆变换到椭圆中相应的面积. 当然, 本题求解也可以引入斜率, 进而去表示点来求解.

下面针对第(2)问给出几种解法.

解法一: (设直线方程求解) 直线 $l: y = kx + t (t \neq 0)$ 与椭圆方程 $x^2 + 2y^2 - 4 = 0$ 联立得 $(1 + 2k^2)x^2 + 4ktx + 2t^2 - 4 = 0$, $\Delta = 16k^2t^2 - 4(1 + 2k^2)(2t^2 - 4) = 8(4k^2 + 2 - t^2)$. 设点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, AB 的中点为 M , 则 $AB = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1 + k^2} \frac{2\sqrt{2}\sqrt{4k^2 + 2 - t^2}}{1 + 2k^2}$, $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2kt}{1 + 2k^2}$, $y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{t}{1 + 2k^2}$, $k_{OM} = \frac{1}{-2k}$, $l_{OP}: y = -\frac{1}{2k}x$. 直线 l_{OP} 与椭圆方程 $x^2 + 2y^2 - 4 = 0$ 联立得 $x_P^2 = \frac{8k^2}{1 + 2k^2}$, 而且 $|x_P| = 2|x_M|$, 所以 $\frac{8k^2}{1 + 2k^2} = 4(\frac{-2kt}{1 + 2k^2})^2$, 即得 $2t^2 = 2k^2 + 1$, 从而弦长 $AB = \sqrt{1 + k^2} \frac{2\sqrt{2}\sqrt{4k^2 + 2 - t^2}}{1 + 2k^2} = \sqrt{1 + k^2} \frac{2\sqrt{2}\sqrt{3t^2}}{2t^2}$, 故原点到直线 AB 的距离为 $d_{O \rightarrow AB} = \frac{|t|}{\sqrt{1 + k^2}}$. 所以 $S_{\square OAPB} = AB \cdot d_{O \rightarrow AB} = \sqrt{1 + k^2} \cdot$

$$\frac{2\sqrt{2}\sqrt{3t^2}}{2t^2} \cdot \frac{|t|}{\sqrt{1 + k^2}} = \sqrt{6}, \text{ 所以 } S_{\square OAPB} = AB \cdot d_{O \rightarrow AB} = \sqrt{6} \text{ 为定值.}$$

解法二: (设点的坐标求解) 设点 $P(x_0, y_0)$, 则 $x_0^2 + 2y_0^2 = 4$, OP 的中点 $M(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2})$. 由熟知的结论

$$(2) \text{ 可得 } k_{OM}k_{AB} = -\frac{b^2}{a^2}, \text{ 则 } k_{AB} = -\frac{x_0}{2y_0}, \text{ 所以直线 } AB$$

的方程为 $y - \frac{y_0}{2} = -\frac{x_0}{2y_0}(x - \frac{x_0}{2})$, 即 $x_0x + 2y_0y - 2 = 0$. 椭圆 $x^2 + 2y^2 = 4$ 与直线 $x_0x + 2y_0y - 2 = 0$ 联立得 $x^2 - x_0x + 1 - 2y_0^2 = 0$, 判别式 $\Delta = x_0^2 - 4(1 - 2y_0^2) =$

$$6y_0^2, \text{ 弦长 } AB = \sqrt{1 + \frac{x_0^2}{4y_0^2}} \sqrt{6y_0^2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \sqrt{x_0^2 + 4y_0^2}, \text{ 所以}$$

$$\text{原点到直线 } AB \text{ 的距离为 } d_{O \rightarrow AB} = \frac{2}{\sqrt{x_0^2 + 4y_0^2}}, \text{ 所以}$$

$$S_{\square OAPB} = AB \cdot d_{O \rightarrow AB} = \sqrt{6} \text{ 为定值.}$$

解法三: (仿射变换) 令 $u = \frac{x}{a}, v = \frac{y}{b}$, 则 $u^2 + v^2 = 1$, 在仿射变换下平行四边形 $OAPB$ 变换为菱形 $OAPB$, 菱形 $OAPB$ 的顶点 P 在单位圆上, 可知 $\triangle OAP$ 为正三角形, 所以 $S_{\text{菱形} OAPB} = OA \cdot OB \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 从而 $S_{\square OAPB} = ab S_{\text{菱形} OAPB} = \sqrt{6}$ 为定值.

变式 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上有三个点 A, B, C , 且 $O (O \text{ 为坐标原点})$ 为 $\triangle ABC$ 的重心.

(1) 记 k_{OA}, k_{BC} 分别为直线 OA, BC 的斜率, 求证: $k_{OA}k_{BC}$ 为定值;

(2) 求证: $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}$ 为定值.

$$\text{参考答案: (1) } k_{OA}k_{BC} = -\frac{b^2}{a^2}, \text{ (2) } S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}ab.$$

问题2 已知点 A, B 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上, 点 A 在第一象限, O 为坐标原点, 且 $OA \perp AB$.

(1) 若 $a = \sqrt{3}, b = 1$, 直线 OA 的方程为 $x - 3y = 0$, 求直线 OB 的斜率;

(2) 若 $\triangle OAB$ 是等腰三角形 (点 O, A, B 按顺时针排列), 求 $\frac{b}{a}$ 的最大值.

分析: 我们利用椭圆中两个熟知的结论由圆的仿射变换可知(1)直径所对的圆周角是直角如图 1, 过中心的弦 $k_{BA}k_{BA'} = -\frac{b^2}{a^2}$. (2) 垂径定理, 如图 2, 中点弦 $k_{AB}k_{OM} = -\frac{b^2}{a^2}$.

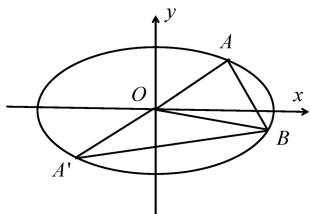


图 1

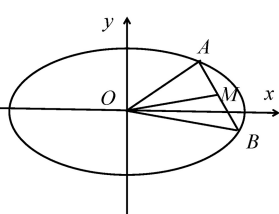


图 2

解析一: 优化路径(1)直径所对的圆周角是直角.

设直线 $A'OA$ 的斜率为 k , 则直线 AB 的斜率为 $-\frac{1}{k}$, 而 $\tan \angle AA'B = \frac{AB}{AA'} = \frac{1}{2}$, 由直线 $A'B$ 到 $A'OA$ 的角为 $\angle AA'B$, 从而得 $\tan \angle AA'B = \frac{k - k_{BA'}}{1 + kk_{BA'}} = \frac{1}{2}$, 所以解得 $k_{BA'} = \frac{2k-1}{k+2}$. 由结论(1) $k_{BA}k_{BA'} = -\frac{b^2}{a^2}$ 可得 $\frac{b^2}{a^2} =$

$$= \frac{2k-1}{k^2+2k}, \text{ 令 } t = 2k-1, k = \frac{t+1}{2}, \text{ 所以 } \frac{b^2}{a^2} = \frac{4}{(t+\frac{5}{t})+6} \leq \frac{2}{\sqrt{5}+3} = (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2, \text{ 当且仅当 } t = \sqrt{5},$$

即 $k = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 时, $\frac{b}{a}$ 取最大值 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

解析二: 优化路径(2)垂径定理.

设直线 OA 的斜率为 k , 则直线 AB 的斜率为 $-\frac{1}{k}$, 而 $\tan \angle AOM = \frac{AM}{OA} = \frac{1}{2}$, 由直线 OM 到 OA 的角为 $\angle AOM$, 得 $\tan \angle AOM = \frac{k - k_{OM}}{1 + kk_{OM}} = \frac{1}{2}$, 所以 $k_{OM} = \frac{2k-1}{k+2}$. 由结论(2) $k_{AB}k_{OM} = -\frac{b^2}{a^2}$, 可得 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{2k-1}{k^2+2k}$, 以下同解析一.

参考文献

[1] 傅海伦. 培养高中生数学建模素养的课例及分析[J]. 中学数学杂志, 2020(11).

一道美国数学奥林匹克题的八种证法

广东省深圳中学 (518001) 邱际春

题目 如图 1, BE 、 CF 分别是锐角 $\triangle ABC$ 的两条高, 以 AB 为直径的圆与直线 CF 相交于点 M 、 N , 以 AC 为直径的圆与直线 BE 相交于点 P 、 Q . 证明: M 、 N 、 P 、 Q 四点共圆. (第 19 届美国数学奥林匹克第 5 题)

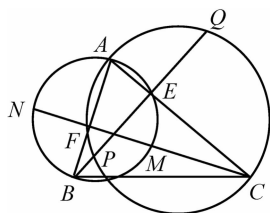


图 1

从图形结构来看, 此题条件精炼, 结构优美, 解法丰富. 文[1]利用线段间的数量关系结合相交弦定理对此赛题进行了证明, 文[2]分别运用三角法和解析法给出两种证法, 笔者在文[3]中利用反演变换给出这一赛题的新证法, 并在文[4]中通过类比和改造图形结构演绎出一些新结论.

本文从图形特征出发, 利用相似三角形的性质、圆的有关性质和定理及三角代换等技巧, 从而给出下面八种新的证明方法, 以飨读者.

1 利用相似三角形的判定与性质证明

证法一: 如图 2, 设 BE 、 CF 交于点 H , 连接 BN 、 EM 、 PH 、 CQ . 因为 BE 、 CF 分别是锐角 $\triangle ABC$ 的两条

高, 所以 $\angle CFB = \angle CEB = 90^\circ$, 注意到 AB 和 AC 为两圆的直径, 所以点 E 和点 F 均为圆上的点. 又因为 $\angle BHF = \angle CHE$, 所以 $\triangle BHF \sim \triangle CEH$, 所以 $\frac{BH}{CH} =$

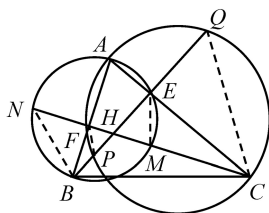


图 2

$\frac{HF}{HE}$. 因为 $\angle BNM = \angle BEM$, $\angle BHN = \angle MHE$, 所以 $\triangle BHN \sim \triangle MHE$, 所以 $\frac{MH}{BH} = \frac{HE}{HN}$. 因为 $\angle PFC = \angle CQP$, $\angle FHP = \angle QHC$, 所以 $\triangle FHP \sim \triangle QHC$, 所以 $\frac{CH}{HQ} = \frac{PH}{HF}$. 以上三式相乘可得 $\frac{MH}{HQ} = \frac{PH}{HN}$. 又 $\angle MHQ = \angle PHN$, 所以 $\triangle PHN \sim \triangle MHQ$, 所以 $\angle PNH = \angle MQH$. 故 M 、 N 、 P 、 Q 四点共圆.

证法二: 如图 3, 设 BE 、 CF 交于点 H , 由题设条件知 H 为垂心. 连接 AH , 且延长后交 BC 于点 D , 则 $AH \perp BC$, 即 $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$. 又因为 AB 和 AC 分别是两圆的直径, 所以点 D 是两圆的交点. 连接