

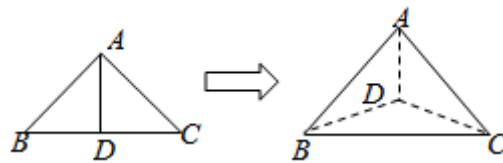
江苏省仪征中学 2020-2021 学年度第一学期

高二数学热身综合练 (5)

班级: _____ 姓名: _____ 学号: _____

一、选择题 (本大题共 4 小题, 共 20.0 分)

- 已知 $a > 0, b > 0, a + b = 3$, 则 $y = \frac{4}{a} + \frac{1}{b+1}$ 的最小值为 ()
 A. $\frac{9}{8}$ B. $\frac{9}{4}$ C. $\frac{9}{2}$ D. 9
- 已知在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n$, 则 a_{2020} 的值为 ()
 A. $\frac{1}{2020}$ B. $\frac{1}{2019}$ C. $\frac{1}{1010}$ D. $\frac{1}{1009}$
- 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , 点 P 在 C 的一条渐近线 $x + \sqrt{2}y = 0$ 上, O 为坐标原点, 若 $|OF| = |PF|$ 且 $\triangle POF$ 的面积为 $2\sqrt{2}$, 则 C 的方程为 ()
 A. $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ B. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ C. $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ D. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$
- (多选题) 如图, 以等腰直角三角形斜边 BC 上的高 AD 为折痕, 把 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 折成互相垂直的两个平面后, 某学生得出下列四个结论, 其中正确的是 ()



- $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} \neq 0$
- $\angle BAC = 60^\circ$
- 三棱锥 $D-ABC$ 是正三棱锥
- 平面 ADC 的法向量和平面 ABD 的法向量互相垂直

二、填空题 (本大题共 4 小题, 共 20.0 分)

- 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 a_3 a_4 = 1, a_6 a_7 a_8 = 64$, 则 $a_5 =$ _____.
- 已知 “ $\exists x \in [\frac{1}{2}, 2], x^2 - mx + 1 \leq 0$ ” 是假命题, 则实数 m 的取值范围为 _____.
- 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 前 n 项和为 S_n , 则 “ $d > 0$ ” 是 “ $S_4 + S_6 > 2S_5$ ” 的 _____ (充分不必要条件/必要不充分条件/充分必要条件/既不充分也不必要条件)
- F_1, F_2 是椭圆 C_1 和双曲线 C_2 的公共焦点, e_1, e_2 分别为曲线 C_1, C_2 的离心率, P 为曲线 C_1, C_2 的一个公共点, 若 $\angle F_1 P F_2 = \frac{\pi}{3}$, 且 $e_2 \in [\sqrt{3}, 2]$, 则 $e_1 \in$ _____.

三、解答题（本大题共 3 小题，共 36.0 分）

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公比 $q > 1$ 的等比数列，若 $a_1 + a_2 + a_3 = 14$ ，且 $a_2 + 1$ 是 a_1, a_3 的等差中项.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $b_n = \log_2 a_n$ ，数列 $\{\frac{1}{b_n b_{n+1}}\}$ 的前 n 项和为 T_n ，若 $T_n < \frac{m}{2} - 1$ 对 $n \in N^*$ 恒成立，

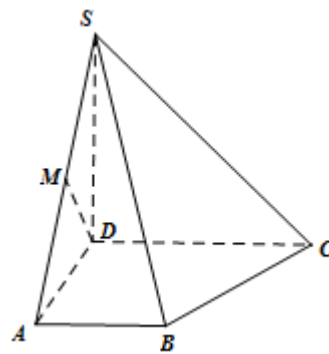
求满足条件的自然数 m 的最小值.

10. 如图, 四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是直角梯形, $AB \parallel CD$, $\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$. $SD \perp$ 平面 $ABCD$, M 是 SA 的中点, $AD = SD = CD = 2AB = 2$.

(I) 证明: $DM \perp$ 平面 SAB ;

(II) 求二面角 $A-SB-C$ 的大小;

(III) 线段 SC 上是否存在一点 E , 使得直线 $SA \parallel$ 平面 BDE . 若存在, 确定 E 点的位置; 若不存在, 说明理由.



11. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F , 若平面上一点 $A(2,3)$ 到焦点 F 与到准线 $l: x = -\frac{p}{2}$ 的距离之和等于 7.

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) 又已知点 P 为抛物线 C 上任一点, 直线 PA 交抛物线 C 于另一点 M , 过 M 作斜率为 $k = \frac{4}{3}$ 的直线 MN 交抛物线 C 于另一点 N , 连接 PN . 问直线 PN 是否过定点, 如果经过定点, 则求出该定点, 否则说明理由.

答案和解析

1. 【答案】B

【解析】解：由 $a > 0$, $b > 0$, $a + b = 3$, 可得 $a + b + 1 = 4$,

则

$$y = \frac{4}{a} + \frac{1}{b+1} = \frac{1}{4}[a + (b+1)](\frac{4}{a} + \frac{1}{b+1}) = \frac{1}{4}[5 + \frac{4(b+1)}{a} + \frac{a}{b+1}] \geq \frac{1}{4}[5 + 2\sqrt{\frac{4(b+1)}{a} \cdot \frac{a}{b+1}}] = \frac{9}{4},$$

当且仅当 $\frac{4(b+1)}{a} = \frac{a}{b+1}$ 且 $a + b = 3$ 即 $b = \frac{1}{3}$, $a = \frac{8}{3}$ 时取等号,

故选：B.

利用“乘1法”与基本不等式的性质即可得出.

本题考查了“乘1法”与基本不等式的性质, 属于基础题.

2. 【答案】C

【解析】解：数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n$, 所以 $(n+1)a_{n+1} - na_n = 0$,

所以 $na_n = 1 \times a_1 = 2$,

所以 $a_n = \frac{2}{n}$,

故 $a_{2020} = \frac{2}{2020} = \frac{1}{1010}$.

故选：C.

直接利用递推关系式的应用求出数列的通项公式, 进一步求出结果.

本题考查的知识要点：数列的通项公式, 数列的递推关系式, 主要考查学生的运算能力和转换能力及思维能力, 属于基础题.

3. 【答案】B

【解析】解：双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , O 为坐标原点, 点 P 在 C 的一条渐近线 $x + \sqrt{2}y = 0$ 上,

渐近线的斜率为: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan \angle POF = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\cos \angle POF = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\sin \angle POF = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

O 为坐标原点, 若 $|OF| = |PF|$, $\triangle POF$ 的面积为 $2\sqrt{2}$, 所以 $\frac{1}{2}c^2 \sin(\pi - 2\angle POF) = 2\sqrt{2}$

解得 $c = \sqrt{6}$, $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c^2 = a^2 + b^2$,

解得 $b = \sqrt{2}$, $a = 2$.

所以双曲线方程为: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$.

故选：B.

利用双曲线的离心率求出渐近线方程, 利用三角形的面积, 结合离心率即可得到方程组

求出 a 即可.

本题考查直线与圆锥曲线的位置关系的应用, 双曲线的简单性质, 考查计算能力.

4. 【答案】BCD

本题考查了折叠前后线线, 线面, 面面关系的应用问题, 解题时要前后对应, 是中档题.

【解析】解: 对于 A , 因为 $BD \perp AD$, $BD \perp DC$, 且 $AD \cap DC = D$,

所以 $BD \perp$ 平面 ADC , 所以 $BD \perp AC$, 所以 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, 选项 A 错误;

对于 B , 由 $AB = AC = BC$, 所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 所以 $\angle BAC = 60^\circ$, 选项 B 正确;

对于 C , 由 $DA = DB = DC$, 且 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 所以三棱锥 $D - ABC$ 是正三棱锥, 选项 C 正确.

对于 D , 由 $BD \perp$ 平面 ADC , $BD \subset$ 平面 ABD , 所以平面 $ABD \perp$ 平面 ADC , 所以平面 ABD 和平面 ADC 的法向量互相垂直, 选项 D 正确.

故选: BCD .

A 中, 由折叠的原理可得 $BD \perp$ 平面 ADC , 推出 $BD \perp AC$, 数量积为零;

B 中, 折叠后 $AB = AC = BC$, 三角形为等边三角形, 得出 $\angle BAC = 60^\circ$;

C 中, 由 $DA = DB = DC$, 且底面为正三角形, 即可判断为正三棱锥;

D 中, 由平面 ADC 和平面 ABD 垂直, 得出法向量也互相垂直.

5. 【解析】解: 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , $\because a_2 a_3 a_4 \neq 1$, $a_6 a_7 a_8 = 64$,

$\therefore (q^4)^3 = 64$, 解得 $q^2 = 2$.

又 $(a_1 q^2)^3 = 1$, 解得 $a_1 = \frac{1}{2}$.

则 $a_5 = \frac{1}{2} \times 2^2 = 2$.

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由 $a_2 a_3 a_4 \neq 1$, $a_6 a_7 a_8 = 64$, 可得 $(q^4)^3 = 64$, 解得 q^2 . 又 $(a_1 q^2)^3 = 1$, 解得 a_1 . 利用通项公式即可得出.

本题考查了等比数列的通项公式与性质, 考查了推理能力与计算能力, 属于中档题.

6. 【答案】 $m < 2$

【解析】解: $\because$ “ $\exists x \in [\frac{1}{2}, 2], x^2 - mx + 1 \leq 0$ ” 是假命题, $\therefore$ 对任意的 $x \in [\frac{1}{2}, 2]$,

$x^2 - mx + 1 > 0$ 恒成立,

$\therefore m < x + \frac{1}{x}$, 对任意的 $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ 恒成立,

$\because x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$, 当且仅当 $x = \frac{1}{x}$ 即 $x = 1$ 时等号成立,

$\therefore m < 2$,

故答案为: $m < 2$.

根据特称命题的性质进行求解即可.

本题主要考查特称命题的应用, 将条件转化为求函数的最值是解决本题的关键.

7. 【答案】 $[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{13}}{13}]$

【解析】解: 如图所示, 设双曲线 C_2 的标准方程

为: $\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1 (a_1, b_1 > 0)$, 半焦距为 c . 椭圆 C_1 :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 半焦距为 c .

不妨设点 P 在第一象限, 设 $|PF_1| = m$, $|PF_2| = n$.

$\therefore m + n = 2a$, $m - n = 2a_1 \Rightarrow m = a + a_1$, $n =$

$a - a_1$.

在 $\triangle PF_1F_2$ 中, 由余弦定理可得: $4c^2 = m^2 + n^2 - 2mncos\frac{\pi}{3} \Rightarrow 4c^2 = a^2 + 3a_1^2$.

两边同除以 c^2 , 得 $\frac{1}{e_1^2} + \frac{3}{e_2^2} = 4$,

$\therefore \frac{1}{e_2^2} \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$, $\therefore \frac{1}{e_1^2} \in [3, \frac{13}{4}]$.

$\therefore e_1 \in [\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{13}}{13}]$.

故答案为: $[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{13}}{13}]$.

设双曲线 C_2 的标准方程为: $\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1 (a_1, b_1 > 0)$, 半焦距为 c . 椭圆 C_1 : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a >$

$b > 0)$, 半焦距为 c . 利用定义可得: $m + n = 2a$, $m - n = 2a_1$. 在 $\triangle PF_1F_2$ 中, 由余弦定

理可得: $4c^2 = m^2 + n^2 - 2mncos\frac{\pi}{3} \Rightarrow 4c^2 = a^2 + 3a_1^2$. 代入化简利用离心率计算公式即

可得出.

本题考查了椭圆与双曲线的定义标准方程及其性质、余弦定理、方程思想, 考查了推理能力与计算能力, 属于难题.

8. 【答案】 C

【解析】

【分析】

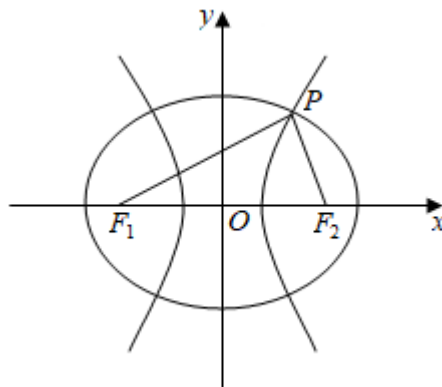
本题借助等差数列的求和公式考查了充分必要条件, 属于基础题.

根据等差数列的求和公式和 $S_4 + S_6 > 2S_5$, 可以得到 $d > 0$; 由 $d > 0$ 也能推出

$S_4 + S_6 > 2S_5$, 根据充分必要条件的定义即可判断.

【解答】

解: 当 $S_4 + S_6 > 2S_5$,



$$\text{则 } 4a_1 + 6d + 6a_1 + 15d > 2(5a_1 + 10d),$$

$$\therefore 21d > 20d,$$

$\therefore d > 0$, 满足必要性;

$$S_4 + S_6 = 4a_1 + 6d + 6a_1 + 15d = 10a_1 + 21d,$$

$$2S_5 = 2(5a_1 + 10d) = 10a_1 + 20d,$$

当 $d > 0$ 时, $21d > 20d$,

$\therefore S_4 + S_6 > 2S_5$, 满足充分性.

故 “ $d > 0$ ” 是 “ $S_4 + S_6 > 2S_5$ ” 充分必要条件,

故选 C.

9.【答案】解: (1) 数列 $\{a_n\}$ 是公比 $q > 1$ 的等比数列, 若 $a_1 + a_2 + a_3 = 14$, 且 $a_2 + 1$ 是 a_1, a_3 的等差中项.

$$\text{所以 } \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 14 \\ 2(a_2 + 1) = a_1 + a_3 \end{cases},$$

$$\text{整理得 } \begin{cases} a_1 + qa_1 + a_1 \cdot q^2 = 14 \\ 2(a_1 \cdot q + 1) = a_1 + a_1 \cdot q^2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = 2 \\ q = 2 \end{cases},$$

故 $a_n = 2^n$.

(2) 由于 $b_n = \log_2 a_n = n$,

$$\text{所以 } \frac{1}{b_n b_{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

$$\text{所以 } T_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1,$$

若 $T_n < \frac{m}{2} - 1$ 对 $n \in N^*$ 恒成立,

只需满足 $\frac{m}{2} - 1 \geq 1$ 即可,

故 $m \geq 4$,

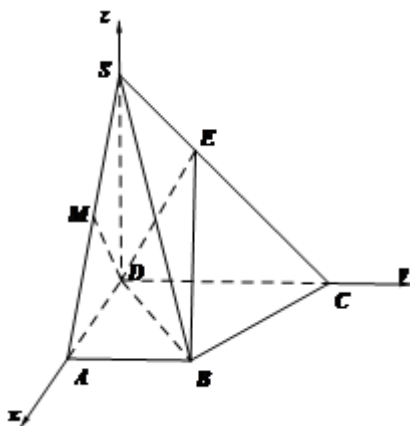
即满足条件的自然数 m 的最小值为 4.

10.【答案】证明: (I) 因为 $SD \perp$ 平面 $ABCD$,

$DA, DC \subset$ 平面 $ABCD$.

所以 $SD \perp DA, SD \perp DC$, 又 $DA \perp DC$.

如图, 以 D 为原点建立空间直角坐标系.



由题意得 $D(0,0, 0)$, $A(2,0, 0)$, $B(2,1, 0)$, $C(0,2, 0)$, $S(0,0, 2)$, $M(1,0, 1)$,

所以 $\overrightarrow{DM} = (1,0,1)$, $\overrightarrow{SA} = (2,0,-2)$, $\overrightarrow{AB} = (0,1,0)$.

所以 $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{SA} = 0$, $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$,

所以 $DM \perp SA$, $DM \perp AB$, $SA \cap AB = A$,

$SA, AB \subset$ 平面 SAB ,

所以 $DM \perp$ 平面 SAB .

解: (II) 设平面 SBC 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

因为 $\overrightarrow{SC} = (0,2,-2)$, $\overrightarrow{BC} = (-2,1,0)$.

所以 $\begin{cases} \overrightarrow{SC} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{BC} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} 2y - 2z = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases}$,

令 $x = 1$, 则 $y = 2$, $z = 2$. 于是 $\vec{n} = (1, 2, 2)$.

因为 $DM \perp$ 平面 SAB , 所以 $\overrightarrow{DM}$ 为平面 SAB 的法向量,

又 $\overrightarrow{DM} = (1,0,1)$.

所以 $\cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{DM} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{DM}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{DM}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

因为所求二面角为钝角, 所以二面角 $A-SB-C$ 大小为 135° .

(III) 设 $\overrightarrow{SE} = \lambda \overrightarrow{SC} = (0, 2\lambda, -2\lambda)$. ($\lambda \in [0,1]$),

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DS} + \overrightarrow{SE} = (0, 2\lambda, 2 - 2\lambda)$,

$\overrightarrow{DB} = (2,1,0)$, $\overrightarrow{SA} = (2,0,-2)$.

设平面 BDE 的法向量 $n_2 = (x_0, y_0, z_0)$,

则 $\begin{cases} \overrightarrow{DE} \cdot n_2 = 0 \\ \overrightarrow{DB} \cdot n_2 = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} 2\lambda y_0 + 2(1-\lambda)z_0 = 0 \\ 2x_0 + y_0 = 0 \end{cases}$,

令 $x_0 = 1$, $y_0 = -2$, $z_0 = \frac{2\lambda}{1-\lambda}$. 于是 $\vec{m} = (1, -2, \frac{2\lambda}{1-\lambda})$,

如果直线 $SA \parallel$ 平面 BDE ,

那么 $\overrightarrow{SA} \cdot \vec{m} = 0$, 解得 $\lambda = \frac{1}{3}$.

所以, 存在点 E 为线段 SC 靠近 S 点的三等分点, 使得直线 $SA \parallel$ 平面 BDE .

11.【答案】解: (1)由已知, 定点 $A(2,3)$ 到焦点 F 与到准线 $l: x = -\frac{p}{2}$ 的距离之和等于 7.

有 $\sqrt{(2 - \frac{p}{2})^2 + 3^2} + (2 + \frac{p}{2}) = 7$, 则 $p = 4$, 即抛物线的方程 $y^2 = 8x$.

(2)设 $P(x_1, y_1)$, $M(x_2, y_2)$, $N(x_3, y_3)$, 则 $k_{PM} = \frac{8}{y_1 + y_2}$, $k_{MN} = \frac{8}{y_2 + y_3}$, $k_{PN} = \frac{8}{y_1 + y_3}$,

由 $k_{MN} = \frac{8}{y_2 + y_3} = \frac{4}{3}$ 知: $y_2 + y_3 = 6$, 即 $y_2 = 6 - y_3$, ①

直线 PM : $y - y_1 = \frac{8}{y_1 + y_2}(x - x_1)$, 即 $(y_1 + y_2)y - y_1y_2 = 8x$ 过 $A(2,3)$,

求得 $y_2 = \frac{16 - 3y_1}{3 - y_1}$, ②

同理求直线 PN 方程 $(y_1 + y_3)y - y_1y_3 = 8x$, ③

由 ① ② 得 $y_1y_3 = 3(y_1 + y_3) - 2$,

代入 ③ 得 $(y_1 + y_3)y - 3(y_1 + y_3) + 2 = 8x$,

$$(y_1 + y_3)(y - 3) + 2 - 8x = 0$$

故 $y = 3$ 且 $2 - 8x = 0$,

直线 PM 恒过点 $(\frac{1}{4}, 3)$.

【解析】本题主要考查了抛物线的标准方程, 性质, 直线与抛物线的几何性质, 两点间距离公式, 斜率公式, 属于中档题.

(1)由两点间距离公式求出 p 的值, 得出抛物线方程.

(2)设 $P(x_1, y_1)$, $M(x_2, y_2)$, $N(x_3, y_3)$, 则 $k_{PM} = \frac{8}{y_1 + y_2}$, $k_{MN} = \frac{8}{y_2 + y_3}$, $k_{PN} = \frac{8}{y_1 + y_3}$, 由

题意得 $y_2 = 6 - y_3$, ①

写出直线 PM 方程, 求得 $y_2 = \frac{16 - 3y_1}{3 - y_1}$, ② 同理求直线 PN 方程 $(y_1 + y_3)y - y_1y_3 = 8x$,

③ 由 ① ② 代入 ③ $(y_1 + y_3)(y - 3) + 2 - 8x = 0$, 可得结果.