江苏省仪征中学 2020-2021 学年第二学期高二数学

周末练习（6）

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。

1. 已知 $f(x)=\dfrac{3x}{e^x}$，则 $f(x)$　　　　（　　）

A．在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增　　　　B．在 $(-\infty,1)$ 上单调递减

C．有极大值 $\dfrac{3}{e}$，无极小值　　　　D．有极小值 $\dfrac{3}{e}$，无极大值

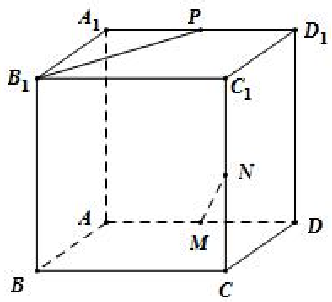
2. 函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\mathbf{R}, f(1)=0, f'(x)$ 为 $f\left(x\right)$ 的导函数，且 $f'\left(x\right)>0$，则不等式 $\left(x-2\right)f\left(x\right)>0$ 的解集是　　　　（　　）

A．$(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$　　B．$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$　　C．$(0,1)\bigcup(2,+\infty)$　　D．$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

3. 若函数 $f(x)=x^2-m\ln x$ 在 $(0,1]$ 上为减函数，则实数 m 的取值范围是　　　　（　　）

A．$[2,+\infty)$　　B．$(2,+\infty)$　　C．$(-\infty,2]$　　D．$(-\infty,2)$

4. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N，P 分别为棱 AD，CC_1，A_1D_1 的中点，则 B_1P 与 MN 所成角的余弦值为　　　　（　　）



A．$\dfrac{\sqrt{30}}{10}$　　B．$-\dfrac{1}{5}$　　C．$\dfrac{\sqrt{70}}{10}$　　D．$\dfrac{1}{5}$

5. 若 $(1+mx)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_6x^6$ 且 $a_1+a_2+\ldots+a_6=63$，则实数 $m=$　　　　（　　）

A. 1　　B. -1 或 3　　C. -3　　D. 1 或 -3

6. 中国古典乐器一般按“八音”分类，这是我国最早按乐器的制造材料来对乐器进行分类的方法，最早见于《周礼・春官・大师》. 八音分为“金、石、土、革、丝、木、匏、竹”，其中“金、石、木、革”为打击乐器，“土、匏、竹”为吹奏乐器，“丝”为弹拨乐器．某同学安排了包括“土、匏、竹”在内的六种乐器的学习，每种乐器安排一节，连排六节，并要求“土”与“夸”相邻排课，但均不与“竹”相邻排课，且“丝”不能排在第一节，则不同的排课方式的种数为　　　　（　　）

A．960　　B．1024　　C．1296　　D．2021

7. 设函数 $f'\left(x\right)$ 是定义在 $\left(0,\pi\right)$ 上的函数 $f\left(x\right)$ 的导函数，有 $f'\left(x\right)\cos x-f\left(x\right)\sin x>0$，若

$a=\frac{1}{2}f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，$b=0$，$c=-\frac{\sqrt{3}}{2}f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$，则 a，b，c 的大小关系是（　　）

A．$a<b<c$　　B．$b<c<a$　　C．$c<b<a$　　D．$c<a<b$

8．已知函数 $f\left(x\right)=\frac{1}{2}ax^2-ax+\ln x$，曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(x_1,f\left(x_1\right)\right)$ 处与点 $\left(x_2,f\left(x_2\right)\right)$ 处的切线均平行于 x 轴，则 $x_1+x_2+x_1x_2+f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)$ 的取值范围是（　　）

A．$\left(-\infty,-\frac{7}{4}-2\ln 2\right)$　　B．$\left(-\frac{7}{4}-2\ln 2,\frac{7}{4}-2\ln 2\right)$

C．$\left(\frac{7}{4}-2\ln 2,+\infty\right)$　　D．$\left(-\frac{7}{4}-2\ln 2,+\infty\right)$

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题意要求.全部选对的得 5 分,有选错的得 0 分,部分选对的 2 分.

9．满足 $|z|=1$ 及 $\left|z+\frac{1}{2}\right|=\left|z-\frac{3}{2}\right|$ 的复数 z 可以是（　　）

A．$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$　　B．$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$　　C．$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$　　D．$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

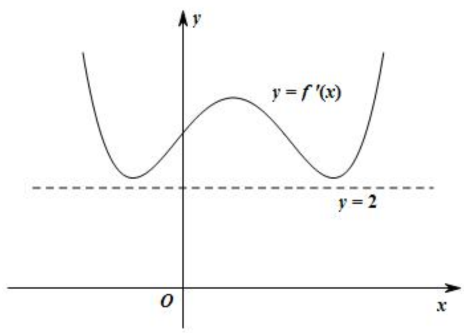
10．已知函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 R，$f\left(-1\right)=2$，$f'\left(x\right)$ 为 $f\left(x\right)$ 的导函数，已知 $y=f'\left(x\right)$ 的图象如图所示，则以下说法正确的是（　　）

A．函数 $f\left(x\right)$ 的图象关于 $x=1$ 对称

B．函数 $y=f\left(x\right)$ 在区间 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上为单调递增函数

C．函数 $f\left(x\right)$ 在 $x=-1$ 处的切线的倾斜角大于 $\frac{\pi}{4}$

D．关于 x 的不等式 $f\left(x\right)>2x+4$ 的解集为 $\left(-1,+\infty\right)$



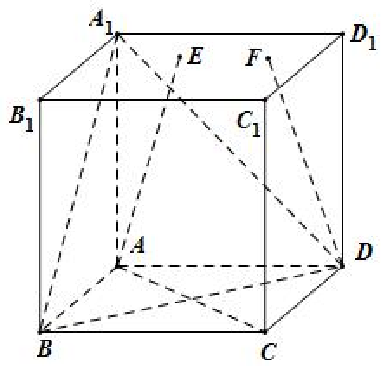
11．已知函数 $f(x)=x^2+\sin x$，则下列说法正确的是（　　）

A．$f\left(x\right)$ 有且只有一个极值点

B．设 $g(x)=f(x)\cdot f(-x)$，则 $g\left(x\right)$ 与 $f\left(x\right)$ 的单调性相同

C．$f\left(x\right)$ 有且只有两个零点　　D．$f\left(x\right)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增

12.已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 E，F 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内，若 $|AE|=\sqrt{5}$，$AC\perp DF$，则（　　）



A. 点 E 的轨迹是一个圆　　　　B. 点 F 的轨迹是一个圆

C. $|EF|$ 的最小值为 $\sqrt{2}-1$

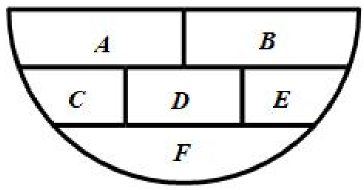
D. AE 与平面 A_1BD 所成角的正弦值的最大值为 $\dfrac{2\sqrt{15}+\sqrt{30}}{15}$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知复数 $z_1=3-bi$，$z_2=1-2i$，若 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 是实数，则实数 b=________.

14. 若 $(2x+\frac{a}{x})^5$ 的展开式中各项系数之和为 0，则展开式中含 x^3 的项为__________.

15. 在生物学研究过程中，常用高倍显微镜观察生物体细胞．已知某研究小组利用高倍显微镜观察某叶片的组织细胞，获得显微镜下局部的叶片细胞图片，如图所示，为了方便研究，现在利用甲、乙等四种不同的试剂对 A 、B 、C 、D 、E 、F 这六个细胞进行染色，其中相邻的细胞不能用同种试剂染色，且甲试剂不能对 C 细胞染色，则共有______种不同的染色方法（用数字作答）.



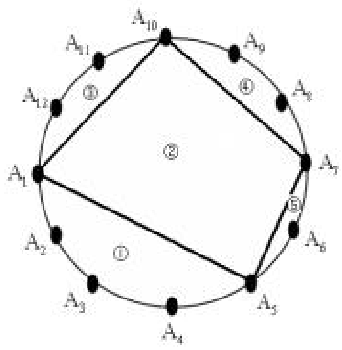
16. 若 $\dfrac{\ln x+1}{x}\le ax+b$ 对于 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，当 $a=0$ 时，b 的最小值为_____；当 $a>0$ 时，$\dfrac{b}{a}$ 的最小值是_____.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知某圆形花坛圆周上有 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_{12}$ 12 个点，且将圆周 12 等分.

(1)若从这 12 个点中任意选择 4 个点，求这 4 个点能组成多少个矩形；

(2)若该花坛被四边形 $A_1A_5A_7A_{10}$ 分成五部分，计划在这五部分里种植花卉，如果有 6 种不同的花卉可供选择，要求每部分种植 1 种花卉，并且相邻两部分种植不同的花卉，求共有多少种不同的花卉种植方案？



18. 已知函数 $f(x)=a\ln x-bx^2$，a、$b\in R$，若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处与直线 $y=-\dfrac{1}{2}$ 相切.

（1）求 a，b 的值；　　（2）求 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{e},e\right]$ 上的极值.

19. 已知在$(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}})^{n}$的展开式中，第 5 项的系数与第 3 项的系数之比是 56∶3．

(1)求展开式中系数绝对值最大的项；

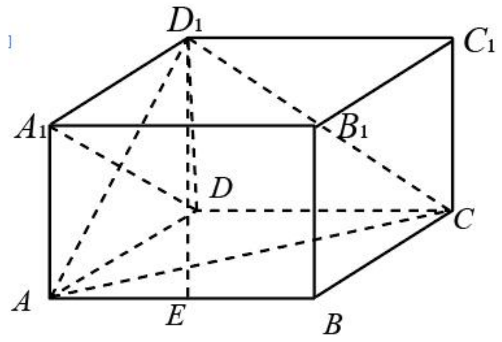
(2)求 $n+9C_{n}^{2}+81C_{n}^{3}+\ldots+9^{n-1}C_{n}^{n}$的值．

20. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AD=AA_1=1$，$AB=2$，E 为 AB 的中点.

（1）证明：$D_1E\perp A_1D$；

（2）求点 E 到平面 ACD_1 的距离；

（3）求平面 AD_1E 与平面 ACD_1 夹角的余弦值.



21. 已知函数 $f\left(x\right)=ax-\frac{x+\ln x}{e^{x}}\left(a\epsilon R\right)$.

（1）当 $a=\frac{1}{e}$ 时，求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）若函数 $f\left(x\right)$ 有两个零点，求实数 a 的取值范围

22. 已知函数 $f(x)=a\ln x+x^2-(a+2)x$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（1）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线的斜率为 1，求 a 的值；

（2）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（3）若函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 上存在零点，证明：当 $x\in(1,\mathrm{e})$ 时，$f(x)>-\mathrm{e}^2$.

周末练习（6）答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。　DCAB　CCCA

1．已知 $f(x)=\frac{3x}{e^x}$，则 $f(x)$

A．在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增　　B．在 $(-\infty,1)$ 上单调递减

C．有极大值 $\frac{3}{e}$，无极小值　　D．有极小值 $\frac{3}{e}$，无极大值

【答案】C

【分析】

求出导函数 $f'(x)$，根据导函数的正负，导函数的零点判断各选项.

【详解】

由题意 $f'(x)=\frac{3(1-x)}{e^x}$，当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增，$x>1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，$f(1)$ 是函数的极大值，也是最大值 $f(1)=\frac{3}{e}$，函数无极小值.

故选：C.

2．函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}, f(1)=0, f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，且 $f'(x)>0$，则不等式 $(x-2)f(x)>0$ 的解集是（　　）

A．$(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$　B．$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$　C．$(0,1)\bigcup(2,+\infty)$　D．$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

【答案】A

【分析】

依题意可得 $f(x)$ 再定义域上单调递增，又 $f(1)=0$，即可得到 $x<1$ 时，$f(x)<0$；$x>1$ 时，$f(x)>0$；再分类讨论分别计算最后取并集即可；

【详解】

解：由题意可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增，又 $f(1)=0$，$x<1$ 时，$f(x)<0$；$x>1$ 时，$f(x)>0$；

对于 $(x-2)f(x)>0$，当 $x>2$ 时，不等式成立，

当 $1<x<2$ 时，$x-2<0, f(x)>0$，不等式不成立；

当 $x<1$ 时，$x-2<0$，且 $f\left(x\right)<0$，

不等式成立不等式的解集 $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

故选：A.

3．若函数 $f(x)=x^2-m\ln x$ 在 $(0,1]$ 上为减函数，则实数 m 的取值范围是（　　）

A. $[2,+\infty)$　　　B. $(2,+\infty)$　　　C. $(-\infty,2]$　　　D. $(-\infty,2)$

【答案】A

【分析】

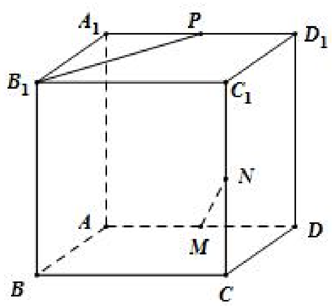
由题意，$f'(x)=2x-\dfrac{m}{x}\le 0$ 在 $x\in(0,1]$ 上恒成立，再参变分离转化为 $m\ge 2x^2$，即求 $2x^2$ 的最大值，可得 m 的范围.

【详解】

由题意得，$f'(x)=2x-\dfrac{m}{x}\le 0$ 在 $x\in(0,1]$ 上恒成立，所以 $m\ge 2x^2$ 在 $x\in(0,1]$ 上恒成立，因为 $2x^2$ 在 $(0,1]$ 的最大值为 2，所以 $m\ge 2$.

故选：A.

4．如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N，P 分别为棱 AD，CC_1，A_1D_1 的中点，则 B_1P 与 MN 所成角的余弦值为（　　）



A．$\dfrac{\sqrt{30}}{10}$　　　B．$-\dfrac{1}{5}$　　　C．$\dfrac{\sqrt{70}}{10}$　　　D．$\dfrac{1}{5}$

【答案】A

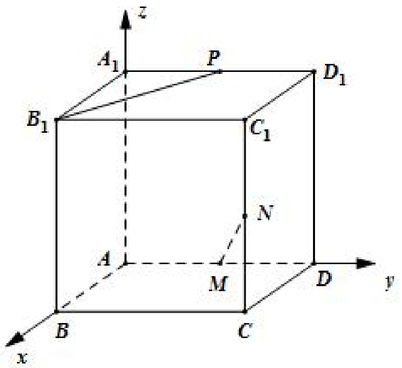
【分析】

如图以 A 为原点，分别以 AB,AD,AA_1 所在的直线为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，求出 $\overrightarrow{B_1P}$ 和 $\overrightarrow{MN}$ 的坐

标，设 B_1P 与 MN 所成的角为 θ，利用 $\cos\theta=\dfrac{\left|\overrightarrow{B_1P}\cdot\overrightarrow{MN}\right|}{\left|\overrightarrow{B_1P}\right|\cdot\left|\overrightarrow{MN}\right|}$ 即可求解.

【详解】

如图以 A 为原点，分别以 AB, AD, AA_1 所在的直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系，



设正方体的棱长为 2，则 $M(0,1,0)$，$N(2,2,1)$，$B_1(2,0,2)$，$P(0,1,2)$，

所以 $\overrightarrow{B_1P}=(-2,1,0)$，$\overrightarrow{MN}=(2,1,1)$，

设 B_1P 与 MN 所成的角为 θ，

所以 $\cos\theta=\dfrac{\left|\overrightarrow{B_1P}\cdot\overrightarrow{MN}\right|}{\left|\overrightarrow{B_1P}\right|\cdot\left|\overrightarrow{MN}\right|}=\dfrac{|-2\times 2+1|}{\sqrt{5}\times\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$，

B_1P 与 MN 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$，

故选：A

【点睛】

方法点睛：

求空间角的常用方法：

（1）定义法，由异面直线所成角、线面角、二面角的定义，结合图形，作出所求空间角，再结合题中条件，解对应三角形，即可求出结果；

（2）向量法：建立适当的空间直角坐标系，通过计算向量夹角（直线方向向量与直线方向向量、直线方

向向量与平面法向量，平面法向量与平面法向量）余弦值，即可求出结果.

5．若$(1+mx)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_6x^6$且$a_1+a_2+\dots+a_6=63$，则实数$m=($　　$)$

A. 1　　　　B. -1或3　　　　C. -3　　　　D. 1或-3

【答案】D

【解析】

【分析】

本题主要考查二项展开式的特定项与特定项的系数，属于基础题.

令$x=1$，得$(1+m)^6=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$，令$x=0$，得 $1=a_0$，即可求解.

【解答】

解：令$x=1$，得$(1+m)^6=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=63+a_0$

令$x=0$，得 $1=a_0$，

$\therefore (1+m)^6=63+1=64$，

$\therefore 1+m=\pm 2$，

$\therefore m=1$或-3，

故选D.

6．中国古典乐器一般按“八音”分类，这是我国最早按乐器的制造材料来对乐器进行分类的方法，最早见于《周礼・春官・大师》．八音分为“金、石、土、革、丝、木、匏、竹”，其中“金、石、木、革”为打击乐器，“土、匏、竹”为吹奏乐器，“丝”为弹拨乐器．某同学安排了包括“土、匏、竹”在内的六种乐器的学习，每种乐器安排一节，连排六节，并要求“土”与“夸”相邻排课，但均不与“竹”相邻排课，且“丝”不能排在第一节，则不同的排课方式的种数为（　　）

A．960　　　　B．1024　　　　C．1296　　　　D．2021

【答案】C

【分析】

排课可分为以下两大类：（1）“丝”被选中，（2）“丝”不被选中，结合分类计数原理，即可求解.

【详解】

由题意，排课可分为以下两大类：

（1）“丝”被选中，不同的方法总数为 $N_1=C_4^2A_2^2A_3^3A_4^2-C_4^2A_2^2A_2^2A_3^2=720$ 种；

（2）“丝”不被选中，不同的方法总数为 $N_2=C_4^3A_2^2A_3^3A_4^2=576$ 种．

故共有 $N=720+576=1296$ 种．

故选：C

7．设函数 $f'(x)$ 是定义在 $(0,\pi)$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数，有 $f'(x)\cos x-f(x)\sin x>0$，若 $a=\frac{1}{2}f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，$b=0$，$c=-\frac{\sqrt{3}}{2}f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$，则 a，b，c 的大小关系是（　　）

A．$a<b<c$　　　　B．$b<c<a$　　　　C．$c<b<a$　　　　D．$c<a<b$

【答案】A

【分析】

根据题意，构造函数 $g(x)=f(x)\cos x$，求导，可得 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的单调性，将 a，b，c 变形整理，结合单调性，即可得答案.

【详解】

设函数 $g(x)=f(x)\cos x$，则 $g'(x)=f'(x)\cos x-f(x)\sin x$，

因为 $f'(x)\cos x-f(x)\sin x>0$，所以 $g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上是增函数，

$a=\frac{1}{2}f\left(\frac{\pi}{3}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}=g(\frac{\pi}{3})$，$b=0=f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2}=g(\frac{\pi}{2})$，

$c=-\frac{\sqrt{3}}{2}f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=f\left(\frac{5\pi}{6}\right)\cos\frac{5\pi}{6}=g(\frac{5\pi}{6})$，

所以 $a<b<c$，

故选：A

8．已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2-ax+\ln x$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 处与点 $(x_2,f(x_2))$ 处的切线均平行于 x 轴，则 $x_1+x_2+x_1x_2+f(x_1)+f(x_2)$ 的取值范围是（　　）

A．$\left(-\infty,-\frac{7}{4}-2\ln 2\right)$　　　　B．$\left(-\frac{7}{4}-2\ln 2,\frac{7}{4}-2\ln 2\right)$

C. $\left(\frac{7}{4}-2\ln 2,+\infty\right)$　　　　D. $\left(-\frac{7}{4}-2\ln 2,+\infty\right)$

【答案】A

【分析】

本题首先可根据函数 $f(x)$ 解析式得出 $f'(x)=ax-a+\frac{1}{x}=\frac{ax^2-ax+1}{x}$，然后根据题意得出 x_1、x_2 是方程 $ax^2-ax+1=0$ 的两个不相等的正根，即可得出 $x_1+x_2=1$、$x_1x_2=\frac{1}{a}$ 以及 $a>4$，再然后令 $h(a)=x_1+x_2+x_1x_2+f(x_1)+f(x_2)$，通过转化得出 $h(a)=-\frac{1}{2}a-\ln a+\frac{1}{a}$，最后根据函数 $h(a)=-\frac{1}{2}a-\ln a+\frac{1}{a}$ 的单调性即可求出取值范围.

【详解】

因为函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2-ax+\ln x$，

所以定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=ax-a+\frac{1}{x}=\frac{ax^2-ax+1}{x}$，

因为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 处与点 $(x_2,f(x_2))$ 处的切线均平行于 x 轴，

所以 x_1、x_2 是方程 $ax^2-ax+1=0$ 的两个不相等的正根，$x_1+x_2=1$，$x_1x_2=\frac{1}{a}$，

则 $\begin{cases} a^2-4a>0 \\ \frac{1}{a}>0 \end{cases}$，解得 $a>4$，

令 $h(a)=x_1+x_2+x_1x_2+f(x_1)+f(x_2)$，

则 $h(a)=1+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}ax_1^{\ 2}-ax_1+\ln x_1+\frac{1}{2}ax_2^{\ 2}-ax_2+\ln x_2$

$=1+\frac{1}{a}-a+\ln\frac{1}{a}+\frac{1}{2}a\ \ 1-\frac{2}{a}\ \ =-\frac{1}{2}a-\ln a+\frac{1}{a}$，

易知 $h(a)=-\frac{1}{2}a-\ln a+\frac{1}{a}$ 在 $(4,+\infty)$ 上是减函数，

故 $h(a)<-\frac{7}{4}-2\ln 2$ ，$x_1+x_2+x_1x_2+f(x_1)+f(x_2)$ 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{7}{4}-2\ln 2\right)$ ，

故选：A.

【点睛】

关键点点睛：本题考查导函数性质的应用以及利用函数单调性求取值范围，能否将

$x_1+x_2+x_1x_2+f(x_1)+f(x_2)$ 转化为 $-\frac{1}{2}a-\ln a+\frac{1}{a}$ 是解决本题的关键，若切线与 x 轴平行，则切点处

的导函数值为 0 ，考查计算能力，是难题.

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题意要求.全部选对的得 5 分,有选错的得 0 分,部分选对的 2 分.

9．满足 $|z|=1$ 及 $\left|z+\frac{1}{2}\right|=\left|z-\frac{3}{2}\right|$ 的复数 z 可以是（　　）

A．$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$　　B．$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

C．$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$　　D．$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

【答案】CD

【分析】

四个选项分别代入 $\left|z+\frac{1}{2}\right|=\left|z-\frac{3}{2}\right|$ 验证是否相等逐项排除可得答案.

【详解】

对于 A，$\left|-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=1$ ，$\left|z+\frac{1}{2}\right|=\left|-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

$\left|z-\frac{3}{2}\right|=\left|-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{2}\right|=\left|-2-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\frac{\sqrt{19}}{2}\neq\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，错误；

对于 B，$\left|-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=1$ ，$|z+\frac{1}{2}|=\left|-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

$\left|z-\frac{3}{2}\right|=\left|-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{2}\right|=\left|-2+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\frac{\sqrt{19}}{2}\neq\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，错误；

C. $\left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=1$，$\left|z+\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2}\right|=\left|1-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\frac{\sqrt{7}}{2}$，$\left|z-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{2}\right|=\left|-1-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\frac{\sqrt{7}}{2}$，

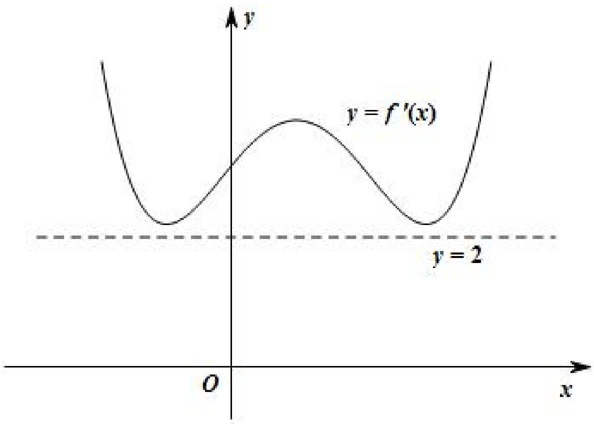
正确；

D. $\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=1$，$\left|z+\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2}\right|=\left|1+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\frac{\sqrt{7}}{2}$，$\left|z-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{2}\right|=\left|-1+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\frac{\sqrt{7}}{2}$，

正确.

故选：CD.

10．已知函数$f(x)$的定义城为R，$f(-1)=2$，$f'(x)$为$f(x)$的导函数，已知$y=f'(x)$的图象如图所示，则以下说法正确的是（　　）



A．函数$f(x)$的图象关于$x=1$对称

B．函数$y=f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上为单调递增函数

C．函数$f(x)$在$x=-1$处的切线的倾斜角大于$\frac{\pi}{4}$

D．关于x的不等式$f(x)>2x+4$的解集为$(-1,+\infty)$

【答案】BCD

【分析】

根据导函数的图象得到$f'(x)>2$，即原函数是增函数可判断ABC；令$g(x)=f(x)-2x-4$，求$g'(x)$判断$g(x)$在R上单调性，利用单调性可解不等式可判断D.

【详解】

对于 A，函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 R 上是单调递增函数，图象不关于 $x=1$ 对称，错误；

对于 B，$f'(x)$ 的图象都在 x 轴的上方，所以 $f'(x)>0$，所以函数 $y=f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上为单调递增函数，正确；

对于 C，$f'(x)$ 的图象都在 $y=2$ 的上方，所以 $f'(x)>2$，设 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处的切线的倾斜角为 α，则 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处切线的斜率 $\tan\alpha$ 大于 2，因为正切函数 $y=\tan\alpha$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 的单调递增，所以倾斜角大于 $\frac{\pi}{4}$，正确；

对于 D，因为 $f'(x)>2$，令 $g(x)=f(x)-2x-4$，则 $g'(x)=f'(x)-2>0$，故 $g(x)$ 在 R 上单调递增，又因为 $g(-1)=f(-1)-2=0$，关于 x 的不等式 $f(x)>2x+4$ 的解集为 $(-1,+\infty)$，正确.

故选：BCD.

11．已知函数 $f(x)=x^2+\sin x$，则下列说法正确的是（　　）

A．$f(x)$ 有且只有一个极值点

B．设 $g(x)=f(x)\cdot f(-x)$，则 $g(x)$ 与 $f(x)$ 的单调性相同

C．$f(x)$ 有且只有两个零点

D．$f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增

【答案】ACD

【分析】

求出函数的导数，及二阶导数说明函数的单调性，即可判断 A、C；首先求出 $g(x)$ 的解析式，再利用导数研究函数的单调性，即可判断 B；根据 $y=x^2$ 与 $y=\sin x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 的单调性即可判断 D；

【详解】

解：由题知，$f'(x)=2x+\cos x$，$f''(x)=2-\sin x>0$，所以 $f'(x)=2x+\cos x$ 在 R 上单调递增，当 $x=0$ 时，$f'(x)=1>0$；当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)=-1+\cos\frac{1}{2}<0$，所以存在 $x_0\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$，使得 $f'(x_0)=0$，

所以函数 $f(x)=x^2+\sin x$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f\left(x\right)$ 有且只有一个极值点，故 A 正确；

因为 $f(-x)=x^2-\sin x$ ，所以 $g(x)=f(x)\cdot f(-x)=x^4-\sin^2 x$ ，所以

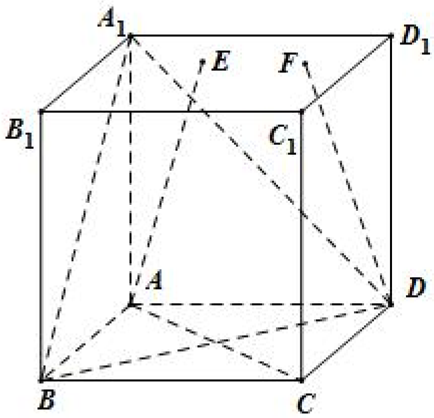
$g'(x)=4x^3-2\sin x\cos x=4x^3-\sin 2x$ 所以 $g'\left(0\right)=0$,故 $g\left(x\right)$ 的一个极值点为 0 ,所以 $g\left(x\right)$ 与 $f\left(x\right)$ 的单调性不相同，故 B 错误；

因为 $f\left(x\right)$ 有且只有一个极值点 x_0 ，$x_0\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$ ，且 $f\left(0\right)=0$ ，所以 $f\left(x\right)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 和 $(x_0,+\infty)$ 上各有一个零点，所以 $f\left(x\right)$ 有且只有两个零点，故 C 正确；

因为 $y=x^2$ 与 $y=\sin x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上都是单调递增，所以 $f(x)=x^2+\sin x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，D 正确．

故选：ACD．

12．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2 ，点 E ，F 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内，若 $|AE|=\sqrt{5}$ ，$AC\perp DF$ ，则（　　）



A．点 E 的轨迹是一个圆

B．点 F 的轨迹是一个圆

C．$\left|EF\right|$ 的最小值为 $\sqrt{2}-1$

D．AE 与平面 A_1BD 所成角的正弦值的最大值为 $\frac{2\sqrt{15}+\sqrt{30}}{15}$

【答案】ACD

【分析】

对于 A、B、C、D 四个选项，需要对各个选项一一验证.

选项 A：由 $|AE|=\sqrt{AA_1^2+A_1E^2}=\sqrt{5}$，得 $|A_1E|=1$，分析得 E 的轨迹为圆的一部分；

选项 B：由 $AC\perp DBF$，而点 F 在 B_1D_1 上，即 F 的轨迹为线段 B_1D_1，;

选项 C：由 E 的轨迹为圆，F 的轨迹为线段 B_1D_1，可分析得 $|EF|_{\min}=d-r$；

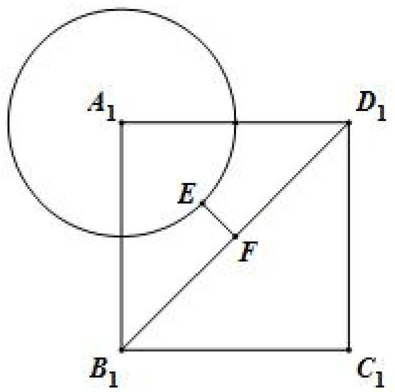
选项 D：建立空间直角坐标系，用向量法求最值.

【详解】

对于 A: $|AE|=\sqrt{AA_1^2+A_1E^2}=\sqrt{5}$，即 $|\sqrt{2^2+A_1E^2}=\sqrt{5}$，所以 $|A_1E|=1$，即点 E 为在面 $A_1B_1C_1D_1$ 内，以 A_1 为圆心、半径为 1 的圆上，应为圆的一部分；故 A 错误；

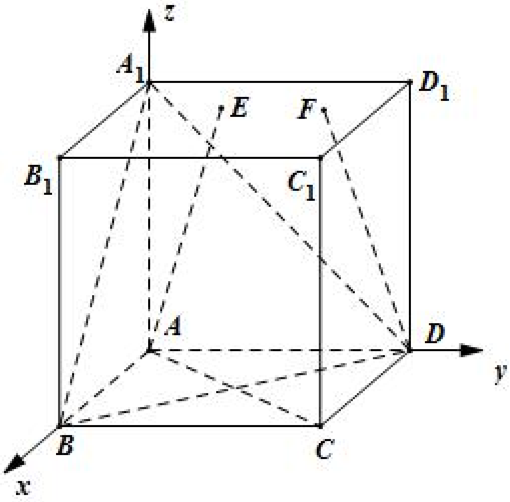
对于 B: 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AC\perp BD$，又 $AC\perp DF$，且 $BD\cap DF=D$，所以 $AC\perp DBF$，所以点 F 在 B_1D_1 上，即 F 的轨迹为线段 B_1D_1，故 B 错误；

对于 C:在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内，



A_1 到直线 B_1D_1 的距离为 $d=\sqrt{2}$, 当点 E，F 落在 A_1C_1 上时，$|EF|_{\min}=\sqrt{2}-1$；故 C 正确；

对于 D:



建立如图示的坐标系，则 $A(0,0,0),B(2,0,0),A_1(0,0,2),D(0,2,0)$

因为点 E 为在面 $A_1B_1C_1D_1$ 内，以 A_1 为圆心、半径为 1 的圆上，可设 $E(\cos\theta,\sin\theta,2)$

所以 $\overrightarrow{AE}=(\cos\theta,\sin\theta,2),\overrightarrow{A_1B}=(2,0,-2),\overrightarrow{BD}=(-2,2,0)$,

设平面 A_1BD 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$ ，则有 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=-2x+2y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=2x-2z=0\end{cases}$

不妨令 $x=1$，则 $\vec{n}=(1,1,1)$ ，

设 AE 与平面 A_1BD 所成角为 α，则：

$$\sin\alpha=|\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{AE}\rangle|=\frac{|\vec{n}\bullet\overrightarrow{AE}|}{|\vec{n}|\times|\overrightarrow{AE}|}=\frac{|\cos\theta+\sin\theta+2|}{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}=\frac{|\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+2|}{\sqrt{15}}$$

当且仅当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，$\sin\alpha$ 有最大值 $\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{15}}=\frac{2\sqrt{15}+\sqrt{30}}{15}$ ，

故 D 正确

故选：CD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．已知复数 $z_1=3-bi$，$z_2=1-2i$，若 $\frac{z_1}{z_2}$ 是实数，则实数 $b=$________.

【答案】6

【分析】

化简 $\frac{z_1}{z_2}$ ，利用虚部为零，计算出 b 即可.

【详解】

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3-bi}{1-2i}=\frac{(3-bi)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{3+2b+(6-b)i}{5}$ ，

$\because \frac{z_1}{z_2}$ 是实数，$\therefore 6-b=0$，即 $b=6$.

故答案为：6

14．若 $(2x+\frac{a}{x})^5$ 的展开式中各项系数之和为 0，则展开式中含 x^3 的项为__________.

【答案】$-160x^3$

【解析】

【分析】

本题考查了二项展开式的特定项与特定项的系数和二项式定理的应用，属于中档题.

令 $x=1$，得 $(2+a)^5=0$，可得 a 的值，再得出二项展开式的通项通项为 $T_{r+1}=(-1)^r\times 2^5\times C_5^r x^{5-2r}$，令 x 的指数等于 3，得出 r，即可得出结果.

【解答】

解：令 $x=1$，得 $(2+a)^5=0$，故 $a=-2$，

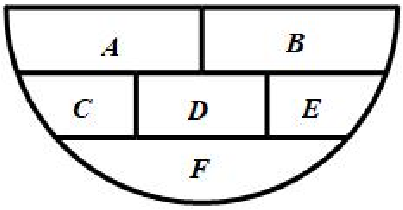
通项为 $T_{r+1}=C_5^r(2x)^{5-r}(\frac{-2}{x})^r=(-1)^r\times 2^5C_5^r x^{5-2r}$，

令 $5-2r=3$，得 $r=1$，

故展开式中含 x^3 的项为 $(-1)\times 2^5C_5^1x^3=-160x^3$.

故答案为 $-160x^3$.

15．在生物学研究过程中，常用高倍显微镜观察生物体细胞．已知某研究小组利用高倍显微镜观察某叶片的组织细胞，获得显微镜下局部的叶片细胞图片，如图所示，为了方便研究，现在利用甲、乙等四种不同的试剂对 A 、B 、C 、D 、E 、F 这六个细胞进行染色，其中相邻的细胞不能用同种试剂染色，且甲试剂不能对 C 细胞染色，则共有______种不同的染色方法（用数字作答）.



【答案】90

【分析】

先考虑 C 细胞的染色试剂没有限制的条件下相邻的细胞不能用同种试剂染色的方法种数，然后考虑用甲试剂对 C 细胞染色且相邻的细胞不能用同种试剂染色的方法种数，将两种方法种数作差即可得解.

【详解】

不考虑甲试剂不能对 C 细胞染色，则 D 细胞的染色试剂有 4 种选择.

①若 C、E 细胞的染色试剂相同，有 3 种选择，A、B 细胞可以用剩余 2 种试剂进行染色，有 2 种方法，则 F 细胞的染色试剂有 2 种选择，

此时，共有 $4\times3\times2\times2=48$ 种不同的染色方法；

②若 C、E 细胞的染色试剂不同，有 3×2 种不同的染色方法，F 细胞的染色方法只有 1 种，

若 A、E 细胞的染色试剂不同，则 A 细胞的染色试剂只有 1 种，B 细胞的染色试剂只有 1 种；

若 A、E 细胞的染色试剂相同，则 B 细胞的染色试剂有 2 种.

此时，共有 $4\times3\times2\times(1+2)=72$ 种不同的染色方法；

综上所述，不考虑甲试剂不能对 C 细胞染色，染色方法种数为 $48+72=120$ 种；

现在考虑用甲试剂对 C 细胞染色，则 D 细胞的染色试剂有 3 种选择.

①若 C、E 细胞的染色试剂相同，则 A、B 细胞可以用剩余 2 种试剂进行染色，有 2 种方法，F 细胞的染色试剂有 2 种，

此时，共有 $3\times2\times2=12$ 种不同的染色方法；

②若 C、E 细胞的染色试剂不同，则 E 细胞的染色试剂有 2 种选择，F 细胞的染色试剂只有 1 种.

若 A、E 细胞的染色试剂不同，则 A 细胞的染色试剂只有 1 种，B 细胞的染色试剂只有 1 种，

若A、E细胞的染色试剂相同，则B细胞的染色试剂有2种.

此时，共有$3\times2\times(2+1)=18$种不同的染色方法.

综上所述，当用甲试剂对C细胞染色时，染色方法种数为$12+18=30$种.

因此，符合条件的染色方法种数为$120-30=90$种.

故答案为：90.

16．若$\frac{\ln x+1}{x}\le ax+b$对于$x\in(0,+\infty)$恒成立，当$a=0$时，$b$的最小值为_____；当$a>0$时，$\frac{b}{a}$的最小值是______________.

【答案】1　　$-\frac{1}{e}$

【分析】

令$a=0$得到$b\ge\left(\frac{\ln x+1}{x}\right)_{\max}$，构造函数$f(x)=\frac{\ln x+1}{x}$，则求出$f(x)_{\max}$，即可求出$b$的最小值；作出$f(x)$的图像，运用函数图像的性质数形结合确定$\frac{b}{a}$的最小值.

【详解】

解：$a=0$时，$b\ge\left(\frac{\ln x+1}{x}\right)_{\max}$，令$f(x)=\frac{\ln x+1}{x}$，

则$f'(x)=\frac{1-\ln x-1}{x^2}=-\frac{\ln x}{x^2}$，

令$f'(x)=0$，

解得：$x=1$，

且当$0<x<1$时，$f'(x)>0, f(x)$单调递增；

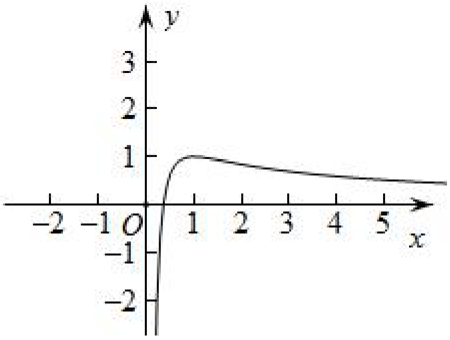
当$x>1$时，$f'(x)<0, f(x)$单调递减，

$\therefore f(x)_{\max}=f(1)=\frac{\ln 1+1}{1}=1$，

$\therefore b\ge1$，

故b的最小值为1，

$f(x)=\frac{\ln x+1}{x}$的图像如下所示：



当 $a>0$ 时，

令 $ax+b=0$ ，可得 $\frac{b}{a}=-x$ ，

故 $\frac{b}{a}$ 取得最小值，直线 $ax+b=0$ 在 x 轴的截距最大，

又∵ $\frac{\ln x+1}{x}\le ax+b$ ，

结合图像可知：令 $f\left(x\right)=\frac{\ln x+1}{x}=0$ ，

可得 $x=\frac{1}{e}$ ，

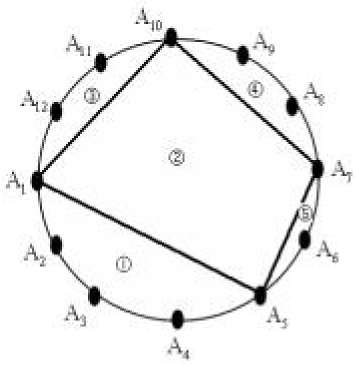
则 $-x=-\frac{1}{e}$ ，

故 $\left(\frac{b}{a}\right)_{\min}=-\frac{1}{e}$.

故答案为：1，$-\frac{1}{e}$.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．已知某圆形花坛圆周上有 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{12}$ 12 个点，且将圆周 12 等分.



(1)若从这 12 个点中任意选择 4 个点，求这 4 个点能组成多少个矩形；

(2)若该花坛被四边形 $A_1A_5A_7A_{10}$ 分成五部分，计划在这五部分里种植花卉，如果有 6 种不同的花卉可供

选择，要求每部分种植 1 种花卉，并且相邻两部分种植不同的花卉，求共有多少种不同的花卉种植方案？

【答案】解：(1)12 个等分点是 6 条直径的端点，以这些等分点为顶点的矩形一定以其中两条直径为对角线，所以有$C_6^2=15$ 个矩形.

(2)根据题意，6 种花卉种在①，②，③，④，⑤5 个区域，分 5 步进行分析：

①从 6 种花卉中选 5 种花卉有 6 种选择；②对于区域①有 5 种花卉可选；③对于区域②，与①相邻，有 4 种花卉可选；④对于区域③，与①，②相邻，有 3 种花卉可选；⑤对于区域④，⑤，若④与①花卉相同，⑤有 3 种花卉可选，若④与①花卉不相同，④有 2 种花卉颜色可选，⑤区域有 2 种花卉可选，则区域④，⑤有 $3+2\times2=7$ 种选择；故不同的花卉种植方案有 $6\times5\times4\times3\times7=2520$ 种.

18．已知函数 $f(x)=a\ln x-bx^2$，a、$b\in R$，若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处与直线 $y=-\frac{1}{2}$ 相切.

（1）求 a，b 的值；

（2）求 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e},e\right]$ 上的极值.

【答案】(1) $\begin{cases}a=1\\b=\frac{1}{2}\end{cases}$；(2) 极大值为 $-\frac{1}{2}$，无极小值.

【分析】

(1) 求得函数额导数 $f'(x)=\frac{a}{x}-2bx$，根据题意列出方程组，即可求得 a,b 的值；

(2) 由 (1) 得 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2$，利用导数求得函数的单调性，结合极值的概念，即可求解.

【详解】

(1) 由题意，函数 $f(x)=a\ln x-bx^2$，可得 $f'(x)=\frac{a}{x}-2bx$，

因为函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处与直线 $y=-\frac{1}{2}$ 相切，

所以 $\begin{cases}f'(1)=0\\f(1)=-\frac{1}{2}\end{cases}$，即 $\begin{cases}a-2b=0\\-b=-\frac{1}{2}\end{cases}$，解得 $a=1,b=\frac{1}{2}$.

(2) 由 (1) 得 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2$，定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f'(x)=\frac{1}{x}-x=\frac{1-x^2}{x}$，

令 $f'(x)>0$ ，得 $0<x<1$ ，令 $f'(x)<0$ ，得 $x>1$.

所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e},1\right)$ 上单调递增，在 $(1,e)$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e},e\right]$ 上的极大值为 $f(1)=-\frac{1}{2}$ ，无极小值.

19．已知在$(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}})^{n}$的展开式中，第 5 项的系数与第 3 项的系数之比是 56：3.

(1)求展开式中系数绝对值最大的项；

(2)求 $n+9C_{n}^{2}+81C_{n}^{3}+\dots+9^{n-1}C_{n}^{n}$的值.

【答案】解：(1)由 $C_{n}^{4}(-2)^{4}:C_{n}^{2}(-2)^{2}=56:3$，

解得 $n=10$，

设第 $r+1$ 项系数的绝对值最大，则

$\begin{cases}C_{10}^{r}2^{r}\geqslant C_{10}^{r-1}2^{r-1}\\C_{10}^{r}2^{r}\geqslant C_{10}^{r+1}2^{r+1}\end{cases}$，

解得$\begin{cases}r\leqslant\frac{22}{3}\\r\geqslant\frac{19}{3}\end{cases}$，

又因为 $r\in\{1,2,3,\dots,9\}$，

所以 $r=7$，当 $r=7$ 时，$T_{8}=-15\,360x^{-\frac{5}{6}}$，

又因为当 $r=0$ 时，$T_{1}=x^{5}$，

当 $r=10$ 时，

$T_{11}=(-2)^{10}x^{-\frac{10}{3}}=1\,024x^{-\frac{10}{3}}$，

所以系数的绝对值最大的项为$T_{8}=-15\,360x^{-\frac{5}{6}}$；

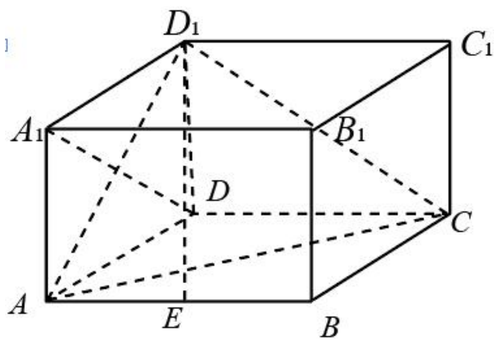
(2 原式$=10+9C_{10}^{2}+81C_{10}^{3}+\dots+9^{10-1}C_{10}^{10}$

$=\frac{9C_{10}^{1}+9^{2}C_{10}^{2}+9^{3}C_{10}^{3}+\dots+9^{10}C_{10}^{10}}{9}$

$$=\frac{C_{10}^{0}+9C_{10}^{1}+9^{2}C_{10}^{2}+9^{3}C_{10}^{3}+\dots+9^{10}C_{10}^{10}-1}{9}$$

$$=\frac{(1+9)^{10}-1}{9}=\frac{10^{10}-1}{9}.$$

20．如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AD=AA_1=1$， $AB=2$，E 为 AB 的中点.



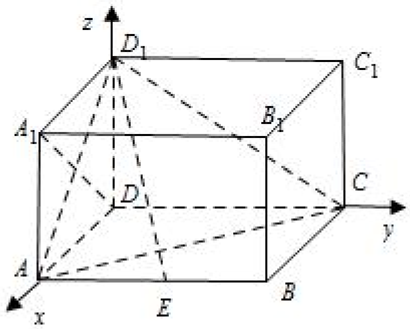
（1）证明：$D_1E\perp A_1D$；

（2）求点 E 到平面 ACD_1 的距离；

（3）求平面 AD_1E 与平面 ACD_1 夹角的余弦值.

（1）如图，以 $\overrightarrow{DA}$ ，$\overrightarrow{DC}$ ，$\overrightarrow{DD_1}$ 为 x,y,z 轴的正方形建立空间直角坐标系，建立空间直角坐标系，

$D_1(0,0,1)$ ，$E(1,1,0)$ ，$A_1(1,0,1)$ ，$D(0,0,0)$



$\overrightarrow{D_1E}=(1,1,-1)$ ，$\overrightarrow{A_1D}=(-1,0,-1)$ ，$\overrightarrow{D_1E}\cdot\overrightarrow{A_1D}=1\times(-1)+1\times0+(-1)\times(-1)=0$ ，

所以 $D_1E\perp A_1D$ ；

（2）$A(1,0,0)$ ，$C(0,2,0)$ ，$D_1(0,0,1)$ ，$E(1,1,0)$ ，

$\overrightarrow{AC}=(-1,2,0)$，$\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,1)$ ，$\overrightarrow{EA}=(0,1,0)$

设平面 ACD_1 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$ ，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0\end{cases}$ ，即 $\begin{cases}-x+2y=0\\ -x+z=0\end{cases}$ ，令 $y=1,$ 则 $x=2,z=2$ ，

所以 $\vec{n}=(2,1,2)$ ，

则点E到平面ACD_1的距离$d=\dfrac{\left|\overrightarrow{EA}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\dfrac{1}{3}$；

（3）由（1）可知$A_1D\perp D_1E$，

又$\because AD=AA_1$，$\therefore A_1D\perp AD_1$，且$AD_1\cap D_1E=D_1$，

$\therefore A_1D\perp$平面AD_1E，$\overrightarrow{A_1D}=\left(-1,0,-1\right)$是平面$AD_1E$的法向量，

$$\cos<\vec{n},\overrightarrow{A_1D}>=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1D}}{|\vec{n}|\left|\overrightarrow{A_1D}\right|}=\frac{2\times\left(-1\right)+2\times\left(-1\right)}{3\times\sqrt{1+1}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$\because$平面AD_1E与平面ACD_1夹角是锐角，

所以平面AD_1E与平面ACD_1夹角的余弦值为$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

21．已知函数$f\left(x\right)=ax-\dfrac{x+\ln x}{e^x}\left(a\epsilon R\right)$.

（1）当$a=\dfrac{1}{e}$时，求函数$f\left(x\right)$的单调区间；

（2）若函数$f\left(x\right)$有两个零点，求实数a的取值范围

【答案】（1）单调递减区间是$(0,1)$，单调递增区间是$(1,+\infty)$；（2）$(0,\dfrac{1}{e})$.

【分析】

（1）$a=\dfrac{1}{e}$时，$f(x)=\dfrac{x}{e}-\dfrac{x+\ln x}{e^x}$，求导$f'(x)=\dfrac{(e^x-\frac{e}{x})+e(\ln x+x-1)}{e^{x+1}}$，由$f'(x)>0$求增区间，由$f'(x)<0$求减区间.

（2）由函数$f(x)$有两个零点，转化为$a=\dfrac{x+\ln x}{xe^x}$在$(0,+\infty)$上有两个不等的实数跟，令$g(x)=\dfrac{x+\ln x}{xe^x}$，用导数法求解.

【详解】

（1）$f(x)$的定义域是$(0,+\infty)$，

当$a=\dfrac{1}{e}$时，$f(x)=\dfrac{x}{e}-\dfrac{x+\ln x}{e^x}$，

$$f'(x)=\frac{1}{e}-\frac{1+\frac{1}{x}-x-\ln x}{e^x}=\frac{(e^x-\frac{e}{x})+e(\ln x+x-1)}{e^{x+1}},$$

当 $x>1$ 时，$e^{x}-\frac{e}{x}>0$，$\ln x+x-1>0$，所以 $f'(x)>0$；

当 $0<x<1$ 时，$e^{x}-\frac{e}{x}<0$，$\ln x+x-1<0$，所以 $f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0,1)$，单调递增区间是 $(1,+\infty)$.

（2）函数 $f(x)$ 有两个零点等价于方程 $f(x)=0$ 有两个不等的实数根，

又函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

所以 $a=\frac{x+\ln x}{xe^{x}}$ 有两个不等的实数跟，

设 $g(x)=\frac{x+\ln x}{xe^{x}}$，

则 $g'(x)=\frac{(1+\frac{1}{x})xe^{x}-(x+\ln x)(1+x)e^{x}}{(xe^{x})^{2}}$，

$=\frac{(1+x)(1-x-\ln x)}{x^{2}e^{x}}$，

设 $h(x)=1-x-\ln x$，

易知 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，且 $h(1)=0$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$h(x)>0$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h(x)<0$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

所以 $g(x)\leq g(1)=\frac{1}{e}$，

又 $x\to 0$ 时，$g(x)\to-\infty$，

$x\to+\infty$ 时，$g(x)\to 0$，

所以实数 a 的取值范围是 $(0,\frac{1}{e})$.

22．已知函数 $f(x)=a\ln x+x^{2}-(a+2)x$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（1）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线的斜率为 1，求 a 的值；

（2）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（3）若函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 上存在零点，证明：当 $x\in(1,\mathrm{e})$ 时，$f(x)>-\mathrm{e}^{2}$.

（1）因为 $f(x)=a\ln x+x^{2}-(a+2)x$，所以 $f'(x)=\frac{a}{x}+2x-(a+2)$，

所以 $f'(2)=\frac{a}{2}+4-(a+2)=1$，解得 $a=2$；

（2）$f'(x)=\frac{a}{x}+2x-(a+2)=\frac{(x-1)(2x-a)}{x}$，$x>0$

①若 $\frac{a}{2}\le 0$ 即 $a\le 0$，$f'(x)>0, x>0$ 的解为 $x>1$，

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$ $f(x)$ 单调递增；

②若 $0<\frac{a}{2}<1$ 即 $0<a<2$，$f'(x)>0, x>0$ 的解为 $0<x<\frac{a}{2}$ 或 $x>1$，

所以当 $x\in\left(0,\frac{a}{2}\right),(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$ $f(x)$ 单调递增；当 $x\in\left(\frac{a}{2},1\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

③若 $\frac{a}{2}=1$ 即 $a=2$，$f'(x)=\frac{2(x-1)^2}{x}\ge 0$ 恒成立，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

④若 $\frac{a}{2}>1$ 即 $a>2$，$f'(x)>0, x>0$ 的解为 $x<1$ 或 $x>\frac{a}{2}$，

所以当 $x\in(0,1),\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$ $f(x)$ 单调递增；当 $x\in\left(1,\frac{a}{2}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.

综上所述，若 $a\le 0$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)$ 单调递减，$x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调递增；若 $0<a<2$，

当 $x\in\left(0,\frac{a}{2}\right),(1,+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调递增，$x\in\left(\frac{a}{2},1\right)$ 时，$f(x)$ 单调递减；若 $a=2$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$

上单调递增；

若 $a>2$，当 $x\in(0,1),\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$ 时，$f(x)$ 单调递增，$x\in\left(1,\frac{a}{2}\right)$ 时，$f(x)$ 单调递减.

（3）证明：由题意，$f'(x)=\frac{a}{x}+2x-(a+2)=\frac{(x-1)(2x-a)}{x}$，

因为导函数 $f'(x)$ 在区间 $(1,e)$ 上存在零点，

设零点为 $x_0, x_0\in(1,e)$，则 $a=2x_0\in(2,2e)$，

所以 $f(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递减，在 (x_0,e) 上单调递增，

故 $f(x)_{\min}=f(x_0)=a\ln x_0+x_0^2-(a+2)x_0=2x_0\ln x_0+x_0^2-(2x_0+2)x_0$

$=2x_0\ln x_0-x_0^2-2x_0$，

设 $g(x)=2x\ln x-x^2-2x, x\in(1,e)$，则 $g'(x)=2\ln x-2x$，

设 $h(x)=g'(x)=2\ln x-2x, x\in(1,e)$ ，则 $h'(x)=\dfrac{2}{x}-2<0$ ，$h(x)$ 单调递减，

又 $h(1)=g'(1)=-2$ ，故 $g'(x)=2\ln x-2x<0$ 在 $\left(1,e\right)$ 上恒成立，故 $g(x)$ 单调递减，

所以 $g(x)>g(e)=-e^2$ ，

故当 $x\in\left(1,e\right)$ 时，$f(x)>-\mathrm{e}^2$.