

## 江苏省仪征中学 18-19 学年第二学期期末文科模拟试卷(二)

### 一. 填空题

1. 已知集合  $A = \{x | |x| \leq 1, x \in \mathbf{Z}\}$ ,  $B = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$ , 则  $A \cap B =$ \_\_\_\_\_

2. 已知复数  $z$  满足  $(1+i)z = 1-7i$  ( $i$  是虚数单位), 则  $|z| =$ \_\_\_\_\_

3. 函数  $y = a^{x-4} + 1 (a > 0, a \neq 1)$  的图象恒过定点  $P$ ,  $P$  在幂函数  $f(x)$  的图象上, 则  $f(x) =$ \_\_\_\_\_.

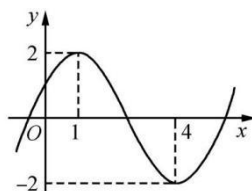
4. 已知  $\theta$  是第三象限角, 且  $\sin\theta - 2\cos\theta = -\frac{2}{5}$ , 则  $\sin\theta + \cos\theta =$ \_\_\_\_\_.

5. 若函数  $y = f(x)$  的值域是  $[\frac{1}{2}, 3]$ , 则函数  $F(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)}$  的值域是\_\_\_\_\_.

6. 已知复数  $z$  满足  $|z| = 1$ , 则  $|z - 1 - i|$  的最大值为\_\_\_\_\_.

7. 已知直线  $l_1: ax + (a+2)y + 1 = 0$ ,  $l_2: x + ay + 2 = 0$ . 若  $l_1 \perp l_2$ , 则实数  $a$  的值是\_\_\_\_\_.

8. 已知简谐运动  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) \left( |\varphi| < \frac{\pi}{2} \right)$  的部分图象如图所示, 则该简谐运动的解析式为\_\_\_\_\_.



9. 在直角  $\triangle ABC$  中, 若  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC = b$ ,  $BC = a$ , 则  $\triangle ABC$  的外接圆半径可表示为

$r = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ . 运用类比推理的方法, 若三棱锥的三条侧棱两两相互垂直且长度分别为  $a, b, c$ , 则该三棱锥外接球的半径  $R =$ \_\_\_\_\_.

10. 已知圆  $C_1: x^2 + y^2 - 2mx + 4y + m^2 - 5 = 0$  和圆  $C_2: x^2 + y^2 + 2x - 2my + m^2 - 3 = 0$ , 若两圆相交, 实数  $m$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

11. 函数  $y = \sin x + \cos x + 2 \sin x \cos x + 2 (x \in [0, \pi])$  的值域为\_\_\_\_\_.

12. 已知函数  $f(x) = |x^2 - 6|$ , 若  $a < b < 0$ , 且  $f(a) = f(b)$ , 则  $a^2b$  的最小值是\_\_\_\_\_

13. 定义在  $R$  上的函数  $f(x)$  对任意  $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$  都有  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ , 且函数  $y = f(x-1)$  的图象关于  $(1, 0)$  成中心对称, 对于  $2 \leq s \leq 4$ , 总存在  $t$  使不等式  $f(s^2 - 2s) \leq -f(2 - t^2)$  成立, 求  $t$  的取值范围是\_\_\_\_\_

14. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 圆  $C_1: (x+1)^2 + (y-6)^2 = 25$ , 圆  $C_2: (x-17)^2 + (y-30)^2 = r^2$ . 若圆  $C_2$  上存在一点  $P$ , 使得过点  $P$  可作一条射线与圆  $C_1$  依次交于点  $A, B$ , 满足  $PA = 2AB$ , 则半径  $r$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

## 二、解答题

15. (14 分) 已知  $\alpha, \beta$  为锐角,  $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ ,  $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ .

(1) 求  $\cos 2\alpha$  的值; (2) 求  $\tan(\alpha - \beta)$  的值.

16. (14 分) 给出两个命题:

命题  $p$ : 关于  $x$  的不等式  $x^2 + (a-1)x + a^2 > 0$  的解集为  $R$ ,

命题  $q$ : 函数  $y = (2a^2 - a)^x$  为增函数.

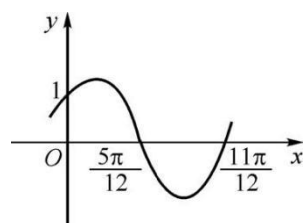
(1) 若命题  $p$  且  $q$  是真命题, 求实数  $a$  的取值范围;

(2) 若命题  $p$  或  $q$  为真,  $p$  且  $q$  为假, 求实数  $a$  的取值范围。

17. (14分) 已知函数  $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0$ ,  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图所示.

(1) 求函数  $f(x)$  的解析式;

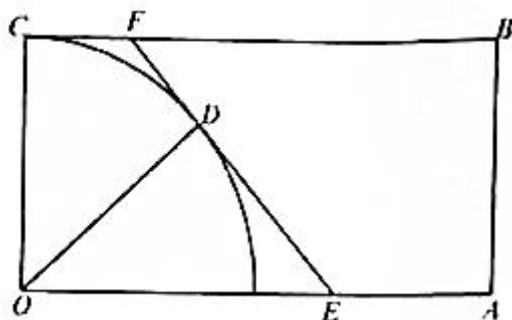
(2) 求函数  $g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{12}\right) - f\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$  的单调增区间.



18. (16分) 如图, 矩形公园  $OABC$  中,  $OA = 2\text{km}$ ,  $OC = 1\text{km}$ , 公园的左下角阴影部分为以  $O$  为圆心, 半径为  $1\text{km}$  的  $\frac{1}{4}$  圆面的人工湖, 现计划修建一条与圆相切的观光道路  $EF$  (点  $E$ 、 $F$  分别在边  $OA$  与  $BC$  上),  $D$  为切点.

(1) 设  $\angle DOE = \theta$ , 试求观光道路  $EF$  长度的最大值;

(2) 公园计划在道路  $EF$  右侧种植草坪, 试求草坪  $ABFE$  面积  $S$  的最大值及相应的  $\theta$ .

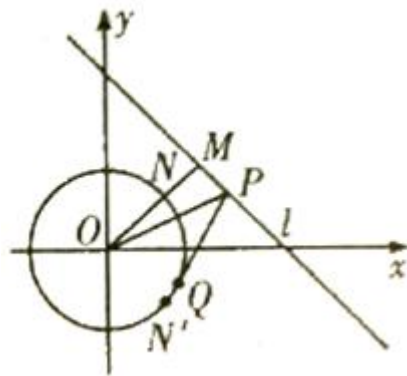


19. (16分) 已知圆  $O: x^2 + y^2 = 2$ , 直线  $l$  过点  $M(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ , 且  $OM \perp l$ ,  $P(x_0, y_0)$  是直线  $l$  上的动点, 线段  $OM$  与圆  $O$  的交点为点  $N$ ,  $N'$  是  $N$  关于  $x$  轴的对称点.

(1) 求直线  $l$  的方程;

(2) 若在圆  $O$  上存在点  $Q$ , 使得  $\angle OPQ = 30^\circ$ , 求  $x_0$  的取值范围;

(3) 已知  $A, B$  是圆  $O$  上不同的两点, 且  $\angle ANN' = \angle BNN'$ , 试证明直线  $AB$  的斜率为定值.



20. (16分) 已知函数  $f(x) = a(x + \ln x)$  ( $a \neq 0$ ),  $g(x) = x^2$ .

(1) 若  $f(x)$  的图象在  $x = 1$  处的切线恰好也是  $g(x)$  图象的切线.

① 求实数  $a$  的值;

② 若方程  $f(x) = mx$  在区间  $[\frac{1}{e}, +\infty)$  内有唯一实数解, 求实数  $m$  的取值范围.

(2) 当  $0 < a < 1$  时, 求证: 对于区间  $[1, 2]$  上的任意两个不相等的实数  $x_1, x_2$ , 都有  $|f(x_1) - f(x_2)| < |g(x_1) - g(x_2)|$  成立.

## 18-19 学年第二学期期末文科模拟试卷（二） 答案

1.  $\{0,1\}$ ;

2. 5;

3.  $\sqrt{x}$ ;

4.  $-\frac{31}{25}$ ;

5.  $[2, \frac{10}{3}]$ ;

6.  $\sqrt{2}+1$ ;

7. 0 或 -3;

8.  $f(x) = 2 \sin(\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{6})$ ;

9.  $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ ;

10.  $-5 < m < -2$  或  $-1 < m < 2$ ;

11.  $[\frac{3}{4}, 3+\sqrt{2}]$ ;

12. -16;

13.  $[0, 2]$ ;

14.  $[5, 55]$ .

### 二、解答题

15. (14 分) 已知  $\alpha, \beta$  为锐角,  $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ ,  $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ .

(1) 求  $\cos 2\alpha$  的值;

(2) 求  $\tan(\alpha - \beta)$  的值.

**【解析】**(1) 因为  $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ ,  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ , 所以  $\sin \alpha = \frac{4}{5} \cos \alpha$ .

因为  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , 所以  $\cos^2 \alpha = \frac{9}{25}$ , 因此,  $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = -\frac{7}{25}$ .

(2) 因为  $\alpha, \beta$  为锐角, 所以  $\alpha + \beta \in (0, \pi)$ .

又因为  $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ , 所以  $\sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ,

因此  $\tan(\alpha + \beta) = -2$ . 因为  $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ , 所以  $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = -\frac{24}{7}$ ,

因此,  $\tan(\alpha - \beta) = \tan[2\alpha - (\alpha + \beta)] = \frac{\tan 2\alpha - \tan(\alpha + \beta)}{1 + \tan 2\alpha \tan(\alpha + \beta)} = -\frac{2}{11}$

16. (14 分) 给出两个命题:

命题  $p$ : 关于  $x$  的不等式  $x^2 + (a-1)x + a^2 > 0$  的解集为  $R$ ,

命题  $q$ : 函数  $y = (2a^2 - a)^x$  为增函数.

(1) 若命题  $p$  且  $q$  是真命题, 求实数  $a$  的取值范围;

(2) 若命题  $p$  或  $q$  为真,  $p$  且  $q$  为假, 求实数  $a$  的取值范围。

16. 解: (1) 若  $p$  为真, 则  $\Delta=(a-1)^2-4a^2<0$ , 即  $3a^2+2a-1>0$ , 解得  $a<-1$  或  $a>\frac{1}{3}$

若  $q$  为真, 则  $2a^2-a>1$ , 解得  $a<-\frac{1}{2}$  或  $a>1$

因为命题  $p$  且  $q$  是真命题, 所以  $p$ 、 $q$  都是真命题,

所以实数  $a$  的取值范围为  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

(2) 因为命题  $p$  或  $q$  为真,  $p$  且  $q$  为假, 所以  $p$ 、 $q$  一真一假

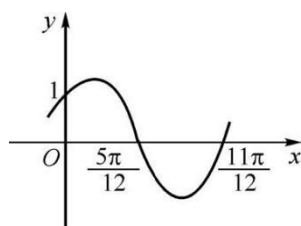
若  $p$  真  $q$  假, 则  $\frac{1}{3}<a\leq 1$       若  $p$  假  $q$  真, 则  $-1\leq a<-\frac{1}{2}$

综上所述, 实数  $a$  的取值范围为  $[-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{3}, 1]$

17. (14分) 已知函数  $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$  ( $\omega>0$ ,  $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图所示.

(1) 求函数  $f(x)$  的解析式;

(2) 求函数  $g(x)=f\left(x-\frac{\pi}{12}\right)-f\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$  的单调增区间.



(1) 由图象知  $T=2\times\left(\frac{11\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)=\pi$ , 所以  $\omega=2$ .

当  $x=\frac{5\pi}{12}$  时,  $\omega x+\varphi=\pi+2k\pi(k\in\mathbb{Z})$ , 所以  $2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi=\pi+2k\pi(k\in\mathbb{Z})$ ,

所以  $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbb{Z})$ .

因为  $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ , 所以  $\varphi=\frac{\pi}{6}$ ,

所以  $f(x)=A\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ .

又  $f(0)=1$ , 所以  $A\sin \frac{\pi}{6}=1$ , 即  $A=2$ .

$$\text{所以 } f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right).$$

$$(2) \text{ 由(1)知 } g(x)=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{6}\right]-2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{6}\right]$$

$$=2\sin 2x-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=2\sin 2x-2\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)$$

$$=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right).$$

$$\text{令 } 2k\pi-\frac{\pi}{2}\leq 2x-\frac{\pi}{3}\leq 2k\pi+\frac{\pi}{2} \quad (k\in\mathbb{Z}),$$

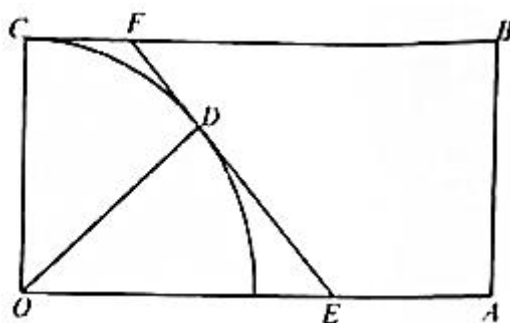
$$\text{得 } k\pi-\frac{\pi}{12}\leq x\leq k\pi+\frac{5\pi}{12} \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

$$\text{所以函数 } g(x) \text{ 的单调增区间是 } \left[k\pi-\frac{\pi}{12}, k\pi+\frac{5\pi}{12}\right] \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

18. (16分) 如图, 矩形公园  $OABC$  中,  $OA=2\text{km}$ ,  $OC=1\text{km}$ , 公园的左下角阴影部分为以  $O$  为圆心, 半径为  $1\text{km}$  的  $\frac{1}{4}$  圆面的人工湖, 现计划修建一条与圆相切的观光道路  $EF$  (点  $E$ 、 $F$  分别在边  $OA$  与  $BC$  上),  $D$  为切点.

(1) 设  $\angle DOE = \theta$ , 试求观光道路  $EF$  长度的最大值;

(2) 公园计划在道路  $EF$  右侧种植草坪, 试求草坪  $ABFE$  面积  $S$  的最大值及相应的  $\theta$ .



【答案】解：(1) 设  $\angle DOE = \theta$ ，因为点  $E$ 、 $F$  分别在边  $OA$  与  $BC$  上，

所以  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ ，则  $\angle DOF = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$ ，

在  $Rt \triangle DOE$  中， $DE = \tan \theta$ ，

在  $Rt \triangle DOF$  中， $DF = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$ ，

$$EF = DE + DF = \tan \theta + \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta},$$

$$\because 0 < \theta \leq \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore \text{当 } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ 时, } [\cos \theta]_{\min} = \frac{1}{2}, \quad EF_{\max} = 2;$$

$$(2) \text{ 在 } Rt \triangle DOE \text{ 中, } OE = \frac{1}{\cos \theta},$$

$$\text{由 (1) 可得 } CF = DF = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta},$$

$$S = S_{\text{矩形 } OABC} - S_{\text{梯形 } OEFC} = 2 + \frac{\sin \theta - 2}{2 \cos \theta} \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}),$$

$$S' = \frac{1 - 2 \sin \theta}{2 \cos^2 \theta}, \quad \text{令 } S' > 0, \quad \text{解得: } 0 < \theta < \frac{\pi}{6},$$

| $\theta$ | $(0, \frac{\pi}{6})$ | $\frac{\pi}{6}$ | $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ |
|----------|----------------------|-----------------|----------------------------------|
| $S'$     | +                    | 0               | -                                |
| $S$      | ↗                    | 极大值             | ↘                                |

因为  $S$  在  $\theta \in (0, \frac{\pi}{3}]$  时有且仅有一个极大值，

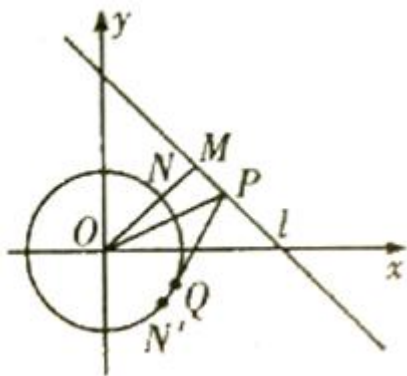
因此这个极大值也即  $S$  的最大值。

$$\therefore \text{当 } \theta = \frac{\pi}{6} \text{ 时, } S_{\max} = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2};$$

答：(1) 观光道路  $EF$  长度的最大值为  $2\text{km}$ ；

$$(2) \text{ 草坪面积 } S \text{ 的最大值为 } 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ km}^2.$$

19. (16 分) 已知圆  $O: x^2 + y^2 = 2$ ，直线  $l$  过点  $M(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ ，且  $OM \perp l$ ， $P(x_0, y_0)$  是直线  $l$  上的动点，线段  $OM$  与圆  $O$  的交点为点  $N$ ， $N'$  是  $N$  关于  $x$  轴的对称点。



(1) 求直线  $l$  的方程

(2) 若在圆  $O$  上存在点  $Q$ , 使得  $\angle OPQ = 30^\circ$ , 求  $x_0$  的取值范围;

(3) 已知  $A, B$  是圆  $O$  上不同的两点, 且  $\angle ANN' = \angle BNN'$ , 试证明直线  $AB$  的斜率为定值.

【答案】解: (1)  $\because OM \perp l$ ,  $\therefore$  直线  $l$  上的斜率为  $-1$ ,

$\therefore$  直线  $l$  上的方程为:  $y - \frac{3}{2} = -(x - \frac{3}{2})$ , 即  $x + y - 3 = 0$ .

(2) 如图可知, 对每个给定的点  $P$ , 当  $PQ$  为圆  $O$  的切线时,  $\angle OPQ$  最大, 此时  $OQ \perp PQ$ ,

若此时  $\angle OPQ = 30^\circ$ , 则  $|OP| = 2|OQ| = 2\sqrt{2}$ , 故只需  $|OP| \leq 2\sqrt{2}$  即可, 即  $x_0^2 + y_0^2 \leq 8$ ,

又  $x_0 + y_0 - 3 = 0 \Rightarrow y_0 = 3 - x_0$ , 代入得:

$$x_0^2 + (3 - x_0)^2 \leq 8 \Rightarrow 2x_0^2 - 6x_0 + 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{3 - \sqrt{7}}{2} \leq x_0 \leq \frac{3 + \sqrt{7}}{2}.$$

(3) 证明: 据题意可求  $N(1, 1)$ ,

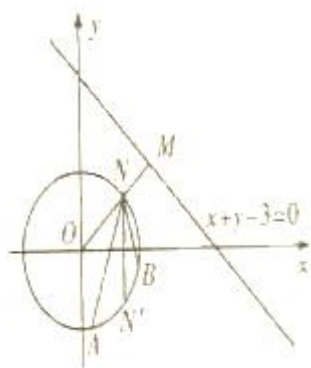
$\because N'$  是  $N$  关于  $x$  轴的对称点,  $\angle ANN' = \angle BNN'$ ,  $\therefore k_{AN} = -k_{BN}$ , 设  $k_{AN} = k$ , 则  $k_{BN} = -k$ , 则直线  $AN$  的方程为:  $y - 1 = k(x - 1)$ , 直线  $BN$  的方程为:  $y - 1 = -k(x - 1)$ ,

联立  $\begin{cases} y = kx + 1 - k \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ , 消去  $y$  得:  $(1 + k^2)x^2 + 2k(1 - k)x + k^2 - 2k - 1 = 0$ ,

$$\because x_A x_N = \frac{k^2 - 2k - 1}{1 + k^2}, \therefore x_A = \frac{k^2 - 2k - 1}{1 + k^2}, \text{ 同理可求 } x_B = \frac{k^2 + 2k - 1}{1 + k^2},$$

$$k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-k(x_B + x_A) + 2k}{x_B - x_A} = \frac{4k}{4k} = 1,$$

故直线  $AB$  的斜率为定值 1.



20. (16 分) 已知函数  $f(x) = a(x + \ln x)$  ( $a \neq 0$ ),  $g(x) = x^2$ .

(1) 若  $f(x)$  的图象在  $x = 1$  处的切线恰好也是  $g(x)$  图象的切线.

① 求实数  $a$  的值;

② 若方程  $f(x) = mx$  在区间  $[\frac{1}{e}, +\infty)$  内有唯一实数解, 求实数  $m$  的取值范围.

(2) 当  $0 < a < 1$  时, 求证: 对于区间  $[1, 2]$  上的任意两个不相等的实数  $x_1, x_2$ , 都有  $|f(x_1) - f(x_2)| < |g(x_1) - g(x_2)|$  成立.

【答案】(1) 解: ①  $f'(x) = a(1 + \frac{1}{x})$ ,  $\therefore x = 1$ ,  $f'(x) = 2a$ , 切点为  $(1, a)$ ,

切线方程为  $y - a = 2a(x - 1)$ , 即  $y = 2ax - a$ ,

联立  $\begin{cases} y = 2ax - a \\ y = x^2 \end{cases}$ , 消去  $y$ , 可得  $x^2 - 2ax + a = 0$ ,  $\Delta = 4a^2 - 4a = 0$ ,  $\therefore a = 1$ ;

② 由  $x + \ln x = mx$ , 得  $m = 1 + \frac{\ln x}{x}$ ,

设  $t(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$ ,  $x \in [\frac{1}{e}, +\infty)$ , 则问题等价于  $y = m$  与  $t(x)$  的图象在  $[\frac{1}{e}, +\infty)$  上有唯一交点,

$\because t'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ ,  $\therefore (\frac{1}{e}, e)$ ,  $t'(x) > 0$ , 函数单调递增,  $(e, +\infty)$ ,  $t'(x) < 0$ , 函数单调递减,

$\because t(\frac{1}{e}) = 1 - e$ ,  $t(e) = 1 + \frac{1}{e}$ , 且  $x \in (e, +\infty)$  时,  $t(x) > 1$ ,

$\therefore m \in [1 - e] \cup \{1 + \frac{1}{e}\}$ ;

(2) 证明: 不妨设  $1 \leq x_1 < x_2 \leq 2$ , 则  $f(x_1) < f(x_2)$ ,  $g(x_1) < g(x_2)$ ,

$\therefore |f(x_1) - f(x_2)| < |g(x_1) - g(x_2)|$  同化为  $f(x_2) - f(x_1) < g(x_2) - g(x_1)$

$\therefore f(x_2) - g(x_2) < f(x_1) - g(x_1)$

设  $F(x) = f(x) - g(x)$ , 即  $F(x) = a(x + \ln x) - x^2$ ,  $\therefore F(x)$  在  $[1, 2]$  上单调递减,

$\therefore F'(x) = \frac{ax + a - 2x^2}{2} \leq 0$  恒成立, 即  $a \leq \frac{2x^2}{x+1}$  在  $[1, 2]$  上恒成立,

$\because \frac{2x^2}{x+1} = \frac{2}{(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) - \frac{1}{4}} \geq 1$ ,  $\therefore a \leq 1$ ,

从而, 当  $0 < a < 1$  时, 命题成立.