

江苏省仪征中学 2021-2022 学年度第一学期高三数学学科导学案

§7.1 空间点、直线、平面之间的位置关系

研制人：雷成才 审核人：陈宏强

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____ 授课日期：_____

- ①理解空间直线、平面位置关系的定义.
- ②了解可以作为推理依据的公理和定理.
- ③能运用公理、定理和已获得的结论证明一些空间位置关系的简单命题.

课前热身

1. (新教材必修第二册 P147 例 1 改编)在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 3$, $AD = 4$, $AA_1 = 2$, 则异面直线 AC 和 BC_1 所成角的余弦值是()

- A. $\frac{8\sqrt{5}}{25}$ B. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{4\sqrt{5}}{25}$

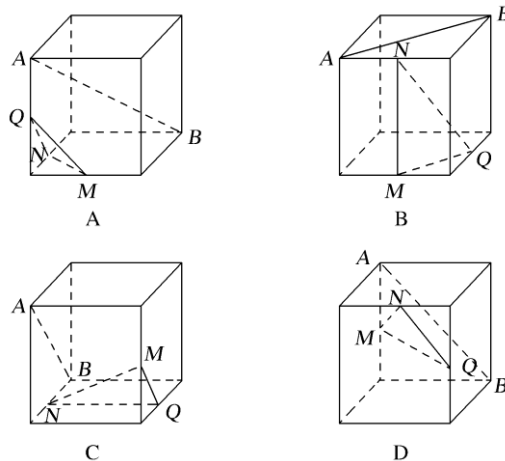
答案 A

2. (教材必修 2P33 例 2 改编)已知空间四边形的两条对角线相互垂直, 顺次连接四边中点的四边形一定是()

- A. 梯形 B. 矩形
C. 菱形 D. 正方形

答案 B

3. (一题多解)(2017 全国 I 卷)如图, 在下列四个正方体中, A, B 为正方体的两个顶点, M, N, Q 为所在棱的中点, 则在这四个正方体中, 直线 AB 与平面 MNQ 不平行的是()



答案 A

4. (2019 贵阳调研) α 是一个平面, m, n 是两条直线, A 是一个点, 若 $m \not\subset \alpha$, $n \subset \alpha$, 且 $A \in m$, $A \in \alpha$, 则 m, n 的位置关系可能是()

A.垂直 B.相交 C.异面 D.平行

解析 依题意, $m \cap \alpha = A$, $n \subset \alpha$, $\therefore m$ 与 n 异面或相交(垂直是相交的特例), 一定不平行.

答案 B C

5. (2020 淮安月考)如图, $\alpha \cap \beta = l$, $A, B \in \alpha$, $C \in \beta$, 且 $C \notin l$, 直线 $AB \cap l = M$, 过 A, B, C 三点的平面记作 γ , 则 γ 与 β 的交线必通过_____

答案 点 C 和点 M

6. 两两平行的三条直线可确定_____个平面.

答案 1 或 3

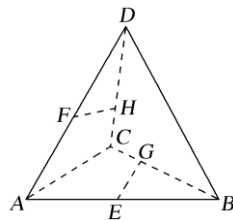
知识梳理

1. 四个公理、三个推论
2. 点、线、面之间的位置关系

典例研究

考点一 平面基本性质及应用

例 1. 已知空间四边形 $ABCD$ (如图所示), E, F 分别是 AB, AD 的中点, G, H 分别是 BC, CD 上的点, 且 $CG = \frac{1}{3}BC$, $CH = \frac{1}{3}DC$. 求证:



(1) E, F, G, H 四点共面;

(2) 三直线 FH, EG, AC 共点.

证明 (1) 连接 EF, GH , 如图所示,

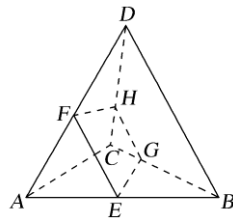
$\because E, F$ 分别是 AB, AD 的中点,

$\therefore EF \parallel BD$.

又 $CG = \frac{1}{3}BC$, $CH = \frac{1}{3}DC$,

$\therefore GH \parallel BD$, $\therefore EF \parallel GH$,

$\therefore E, F, G, H$ 四点共面.



(2) 易知 FH 与直线 AC 不平行, 但共面,

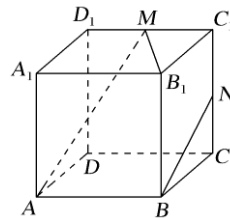
$\therefore$ 设 $FH \cap AC = M$, $\therefore M \in$ 平面 $EFHG$, $M \in$ 平面 ABC .

又平面 $EFHG \cap$ 平面 $ABC = EG$,

$\therefore M \in EG. \therefore FH, EG, AC$ 共点.

考点二 空间两直线位置关系的判定

例 2. (多选题)如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N 分别为棱 C_1D_1, C_1C 的中



点, 则下列说法正确的有()

A. 直线 AM 与 CC_1 是相交直线

B. 直线 AM 与 BN 是平行直线

C. 直线 BN 与 MB_1 是异面直线

D. 直线 AM 与 DD_1 是异面直线

解析 直线 AM 与 CC_1 是异面直线, 直线 AM 与 BN 也是异面直线, 故 AB 错误.

答案 CD

考点三 异面直线所成的角

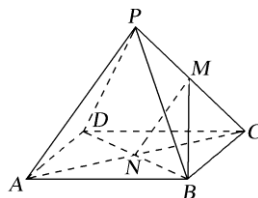
例 3. 已知四棱锥 $P - ABCD$ 的底面边长都为 2, $PA = PC = 2\sqrt{3}$, $PB = PD$, 且 $\angle DAB = 60^\circ$, M 是 PC 的中点, 求异面直线 MB 与 AP 所成的角.

解析 (1)如图, 连接 AC 与 BD , 相交于点 N , 连接 MN , 则 $MN \parallel PA$,

所以 $\angle NMB$ (或 $\angle NMB$ 的补角) 为异面直线 MB 与 AP 所成的角,

在 $\triangle MNB$ 中, 由题意得 $NB = 1$, $MN = \sqrt{3}$, $BN \perp MN$, 则

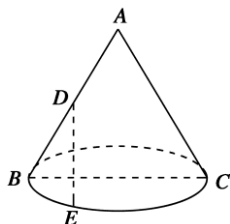
$$\tan \angle NMB = \frac{NB}{MN} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \therefore \angle NMB = 30^\circ, \text{ 故答案为 } 30^\circ.$$



课堂小结

跟踪反馈

1. 如图, 等边 $\triangle ABC$ 为圆锥的轴截面, D 为 AB 的中点, E 为弧 BC 的中点, 则直线 DE 与 AC 所成角的余弦值为(C)



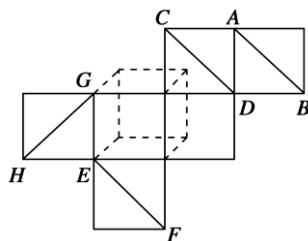
A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{3}{4}$

2. (2021 甘肃诊断)如图为正方体表面的一种展开图, 则图中的 AB , CD , EF , GH 在原正方体中互为异面直线的有(C)对.



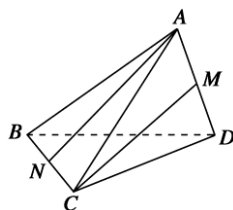
A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

3. 如图, 在三棱锥 $A-BCD$ 中, $AB=AC=BD=CD=3$, $AD=BC=2$, 点 M , N 分别为 AD , BC 的中点, 则异面直线 AN , CM 所成的角的余弦值是(C)



A. $\frac{5}{8}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{8}$

C. $\frac{7}{8}$

D. $\frac{\sqrt{7}}{8}$

4. 已知平面 α , β , γ 两两垂直, 直线 a , b , c 满足: $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $c \subset \gamma$, 则直线 a , b , c 不可能满足以下哪种关系(B)

A. 两两垂直

B. 两两平行

C. 两两相交

D. 两两异面

5. 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ABC=120^\circ$, $AB=2$, $BC=CC_1=1$, 则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为(C)

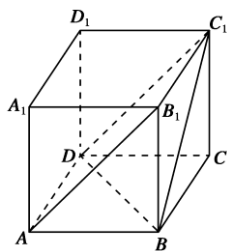
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$

C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

[解析] 解法一: 如图所示, 补成四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$,



连 DC_1 、 BD ，则 $DC_1 \parallel AB_1$ ，

$\therefore \angle BC_1D$ 即为异面直线 AB_1 与 BC_1 所成的角，

由题意知 $BC_1 = \sqrt{2}$ ，

$$BD = \sqrt{2^2 + 1^2 - 2 \times 2 \times 1 \times \cos 60^\circ} = \sqrt{3},$$

$$C_1D = \sqrt{5},$$

$$\therefore BC_1^2 + BD^2 = C_1D^2, \therefore \angle DBC_1 = 90^\circ,$$

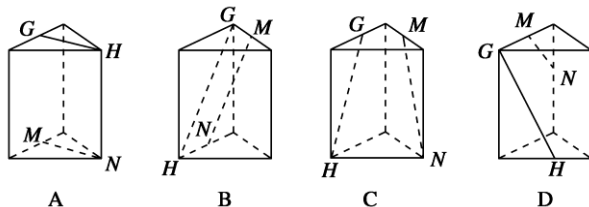
$$\therefore \cos \angle BC_1D = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}. \text{ 故选 C.}$$

6. (多选) 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，用一个平面 α 截这个正方体，把该正方体分为体积相等的两部分，则下列结论正确的是(AD)

- A. 这两部分的表面积也相等
- B. 截面可以是三角形
- C. 截面可以是五边形
- D. 截面可以是正六边形

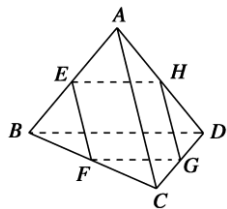
[解析] 平面 α 截这个正方体，把该正方体分为体积相等的两部分，则平面 α 一定过正方体的中心，所以这两部分的表面积也相等，根据对称性，截面不会是三角形、五边形，但可以是正六边形(如图)。故选 AD.

7. (多选) (2021 湘潭调研改编)下图中， G ， N ， M ， H 分别是正三棱柱(两底面为正三角形的直棱柱)的顶点或所在棱的中点，则表示直线 GH ， MN 是异面直线的图形是(BD)



8. 若两条异面直线 a 、 b 所成角为 60° ，则过空间一点 O 与两异面直线 a 、 b 所成角都为 60° 的直线有 3 条.

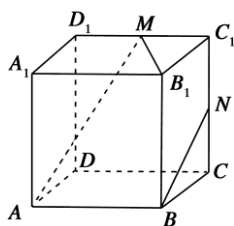
9. (必修 2 P₄₅ 例 2)如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中， E ， F ， G ， H 分别是棱 AB ， BC ， CD ， DA 上的点，



(1)若 $\frac{AE}{EB}=\frac{AH}{HD}$ 且 $\frac{CF}{FB}=\frac{CG}{GD}$, 则 E, F, G, H 是否共面. 共面.

(2)若 E, F, G, H 分别为棱 AB, BC, CD, DA 的中点, ①当 AC, BD 满足条件 $AC=BD$ 时, 四边形 $EFGH$ 为菱形; ②当 AC, BD 满足条件 $AC=BD$ 且 $AC \perp BD$ 时, 四边形 $EFGH$ 为正方形.

10. 如图所示, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N 分别为棱 C_1D_1, C_1C 的中点, 有以下四个结论:



①直线 AM 与 CC_1 是相交直线;

②直线 AM 与 BN 是平行直线;

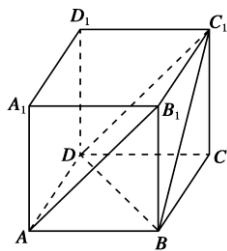
③直线 BN 与 MB_1 是异面直线;

④直线 AM 与 DD_1 是异面直线.

其中正确的结论为 ③④ (注: 把你认为正确的结论序号都填上).

11. 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ABC=120^\circ$, $AB=2$, $BC=CC_1=1$, 求异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角.

[解析] 解法一: 如图所示, 补成四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$,



连 DC_1, BD , 则 $DC_1 \parallel AB_1$,

$\therefore \angle BC_1D$ 即为异面直线 AB_1 与 BC_1 所成的角,

由题意知 $BC_1=\sqrt{2}$,

$$BD=\sqrt{2^2+1^2-2 \times 2 \times 1 \times \cos 60^\circ}=\sqrt{3},$$

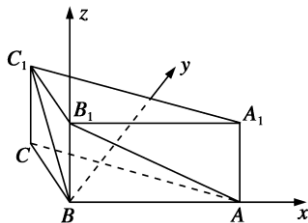
$$C_1D=\sqrt{5},$$

$$\therefore BC_1^2+BD^2=C_1D^2, \therefore \angle DBC_1=90^\circ,$$

$$\therefore \cos \angle BC_1D = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}. \text{ 故选 C.}$$

解法二：(向量法)

如图建立空间直角坐标系，则 $B(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $B_1(0,0,1)$, $C_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$,

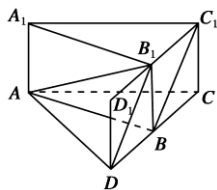


$$\text{从而 } \vec{AB_1} = (-2, 0, 1), \vec{BC_1} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right),$$

记异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角为 θ ,

$$\text{则 } \cos \theta = \frac{|\vec{AB_1} \cdot \vec{BC_1}|}{|\vec{AB_1}| |\vec{BC_1}|} = \frac{2}{\sqrt{5} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}, \text{ 故选 C.}$$

解法三：如图所示，分别延长 CB , C_1B_1 至 D , D_1 ，使 $BD=BC$, $B_1D_1=B_1C_1$ ，连接 DD_1 , B_1D 。



由题意知， $C_1B \parallel B_1D$,

则 $\angle AB_1D$ 即为异面直线 AB_1 与 BC_1 所成的角。

连接 AD ，在 $\triangle ABD$ 中，由 $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cos \angle ABD$ ，得 $AD = \sqrt{3}$ 。

又 $B_1D = BC_1 = \sqrt{2}$, $AB_1 = \sqrt{5}$,

$$\therefore \cos \angle AB_1D = \frac{AB_1^2 + B_1D^2 - AD^2}{2AB_1 \cdot B_1D} = \frac{5 + 2 - 3}{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$