纠错也是深度学习的好抓手

郭立祥　（广东省中山市实验中学　528400）

摘　要：通过“查找错误”进行“原因分析”，“以错为源”开展“初步拓展”，在探究原问题的基础上，结合教师的“适度引导”来推进“深度学习”，拓广原问题的内涵和外延，创设学生逻辑推理素养发展的环境，帮助学生养成良好的思维习惯.

关键词：纠错；深度学习；高中数学

数学深度学习是指学生理解数学本质、提升数学逻辑思维能力、促进学科核心素养发展的学习过程.纠错是深度学习的一种重要形式，它指的是以学习过程中出现的错误为探究出发点，学生运用自己所掌握的知识和技能，充分发挥学习的自主性和同学之间小组合作的优势，逐步找出错误的原因，补充和完善知识和技能的短板，形成理解以后的知识和技能.皮亚杰说：“学习就是一个不断犯错误的过程，同时也是一个不断通过反复思考，挖掘错误缘由，逐渐消除错误的过程.”因此，在纠错过程中分析错误的原因，针对性地补缺补差，并进一步探究原问题，可使纠错效益达到最大化，促进深度学习质量的提高.

导数知识的学习对于学生数学综合素养能力的要求较高，因此具有较大的挑战性，笔者以高三年级普通班“导数的综合应用”习题讲评课为例，来探究纠错在深度学习中的作用.

1　查找错误，进行原因分析

当学生给出一道题目的解答，而教师和其他学生又说解答有问题的时候，他自然而然地产生疑惑：错在哪里？方法错了？计算错误？审题不清？格式不规范？教师需要引导学生分析问题，找出错误的原因，从解答中分析出学生对于知识的掌握程度，针对性地进行补缺补差，并审视错误是个案还是普遍存在，以此作为提高教学效率的一个着眼点.

在学习“导数的综合应用”之前笔者给学生布置了课前作业：若函数 $f(x)=ax-\ln x$ 在区间$(0,1)$内是减函数，求实数 a 的取值范围.在作业中，很多学生的解法如下：

解　$f'(x)=a-\frac{1}{x}$，因为函数在区间$(0,1)$内单调递减，所以 $a\leqslant\frac{1}{x}$ 在区间$(0,1)$上恒成立，令 $g(x)=\frac{1}{x}$，$x\in(0,1)$，则 $a<[g(x)]_{\min}=g(1)=1$，因此 a 的取值范围为$(-\infty,1)$.

很明显，这种解法有问题.如何让学生对作业中出现的错误引起反思，以及掌握同类问题的处理方法，就成为教师教学的重点.

通过学生的小组合作讨论和小组代表发言，最后大家找出了以上解法中存在的问题：

(1)定义域与值域方面：$g(x)=\frac{1}{x}$ 在区间$(0,1)$内取不到 $g(1)$.

分析　通过自变量的取值范围来确定函数的极大(小)值或者最大(小)值时，区间的端点恰好就是极值点，粗心往往导致学生出错.

(2)格式的规范化方面：由(1)可知“$[g(x)]_{\min}=g(1)=1$”存在问题，正确的表述方式应该为“$\left(\frac{1}{x}\right)_{\min}<1$ 或者 $g(x)<\lim\limits_{x\to1}g(x)=1$”.

分析　解题过程的规范表达是逻辑思维的过程展示，让读者通过阅读能够知道问题是如何解决的，包括数学符号的书写，公式、定理、公理的正确使用，逻辑推理的合理性等就显得尤为重要.“$[g(x)]_{\min}=g(1)=1$”展示出来的信息是：“当 $x=1$ 时，函数 $g(x)$ 取得最小值”，而本题中函数 $g(x)$ 的定义域为$(0,1)$，x 取不到1，因此书写表达错误恰好体现出格式规范化的重要性.

(3)思维严密性方面：a 可以取到1.

分析　逻辑思维的严密性往往体现在细节的处理上，学生在给出“$a\in(-\infty,1)$”时，自然而然会想到：可不可以取到1？这一点恰好反映出解决问题的过程与结果是否具备完备性.

在不断纠错的过程中，发现错误的出处，分析原因，纠正错误，强化学生对于定义域和值域概念的理解以及应用导数来解决恒成立问题的技能.

最后学生们形成一致意见："函数 $g(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内取不到 $g(1)$，但 a 可以取到1，因此 a 的取值范围为 $(-\infty,1]$."

由此可知，纠错可以作为深度学习的好抓手．在实际教学过程中，发现学生给出的解答中存在问题的时候，要善待这些错误，它们是发现学生知识和技能短板的好机会，若能有针对性地进行补缺补差，最终解决问题，那么学生获得的成就感和幸福感最明显．在纠错过程中寻找问题，然后想办法解决问题，再进一步提出问题，既解决了原问题，也拓广了问题的外延，学生在学习过程中获得的知识和技能逐步实现精确化、最大化，甚至将纠错过程中出现的问题转化为自己的优势．

2　以错为源，开展初步拓展

虽然课前作业中出现的共性问题解决了，但教学决不能就题论题．纠错也不能够满足于找出错误，要从原因入手进行问题的深度拓展，对原问题进行拓展来探究出同类问题的通解，进而使学生的数学思维、创新能力得到提升．为了避免学生对于同类问题再犯同样的错误，教师需要在实际教学过程中以错为源，开展初步拓展．为了解决"已知给定区间上的递减函数，求参数的取值范围"这类问题，教师继续引导学生变化条件而保持结果不变．很多学生分别在函数的解析式和定义域方面进行改造，整理如下：

拓展1　若函数 $f(x)=ax-\ln x+b$，其中 b 为常数，在区间 $(0,1)$ 内是减函数，则实数 a 的取值范围是________．

拓展2　若函数 $f(x)=ax-\ln x+b$，其中 b 为常数，在区间 $(c,1)$ 内是减函数，$0<c<1$，则实数 a 的取值范围是________．

分析　显然拓展1和拓展2的题目难度比原问题有所增加，在"以错为源"的基础上，通过初步拓展，解决同类问题，而且强化学生不要再犯定义域与值域、格式规范化等的错误．

在初步拓展过程中，有学生提出如果把课前作业中的减函数改为增函数，由于函数的定义域为 $(0,1)$，在区间 $(0,1)$ 内函数 $g(x)=\frac{1}{x}$ 就不存在最大值，经过深入探究给出以下拓展形式：

拓展3　若函数 $f(x)=ax-\ln x$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 内是增函数，则实数 a 的取值范围是________．

课堂上学生给出了正确解答：$f'(x)=a-\frac{1}{x}$，因为函数在区间 $(1,\mathrm{e})$ 内单调递增，所以 $a\geqslant\frac{1}{x}$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 上恒成立，令 $g(x)=\frac{1}{x}$，$x\in(1,\mathrm{e})$，由于 $g(x)\leqslant[g(x)]_{\max}<1$，则 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$．

在"以错为源"的基础上，继续进行拓展，将解析式和定义域适度变化，学生们经过讨论也给出"已知给定区间上的递增函数，求参数的取值范围"这类问题在条件变化、结果不变的要求下的一般拓展形式：

拓展4　若函数 $f(x)=ax-\ln x+b$，其中 b 为常数，在区间 $(1,+\infty)$ 内是增函数，则实数 a 的取值范围是________．

分析　显然拓展3和拓展4是对于拓展1和拓展2的进一步拓展，进一步强化了导数在函数极值中的应用，以及恒成立条件下的最大值与最小值问题．

3　适度引导，推进深度学习

为了进一步研究更加一般化的问题"已知给定区间上的递增(减)函数，求参数的取值范围"，教师引导学生深度探究下面两个拓展问题：

拓展5　若函数 $f(x)=ax-b\ln x+c(b>0$ 且 b,c 为常数$)$ 在区间 (d,e) 上是减函数，其中 $0<d<e$，则实数 a 的取值范围是________．

经过讨论给出如下解答：$f'(x)=a-\frac{b}{x}$，因为函数在区间 (d,e) 内单调递减，所以 $a\leqslant\frac{b}{x}$ 在区间 (d,e) 上恒成立，令 $g(x)=\frac{b}{x}$，$x\in(d,e)$，$b>0$，$0<d<e$，则 $a\leqslant[g(x)]_{\min}<\frac{b}{e}$，因此 a 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{b}{e}\right]$．

分析　在教师适度引导下，深度学习不断推进，使得大家解决表达形式更加一般化的问题：b,c,d,e 是相应取值范围内的任意一个常数，进一步拓广了问题的维度．

拓展6　若函数 $f(x)=ax-b\ln x+c$(其中 $b>0$ 且 b,c 为常数)在区间 $(d,+\infty)$ 上是增函数，其中 $d>0$，则实数 a 的取值范围是________．

经过讨论给出如下解答：$f'(x)=a-\frac{b}{x}$，因

为函数在区间$(d,+\infty)$内单调递增,所以$a\geqslant\frac{b}{x}$在区间$(d,+\infty)$上恒成立,令$g(x)=\frac{b}{x}$,$x\in(d,+\infty)$,$b>0$,$d>0$,则$g(x)\leqslant[g(x)]_{\max}<\frac{b}{d}$,因此$a$的取值范围为$\left[\frac{b}{d},+\infty\right)$.

分析　通过对拓展 6 的研究,大家探究出"已知给定区间上的递增函数,求参数的取值范围"更加一般化的表达形式.类比拓展 5,找出这两类问题的异同点,进一步拓广问题的维度.

基于纠错过程的深度学习所产生的拓展 5 和拓展 6,都是紧紧围绕"已知给定区间上的递增(减)函数,求参数的取值范围"这个问题,把一个简单的小问题拓广到更加一般化的问题,在归纳总结的基础上,学生对这类问题有了更清晰的认识.扭住错误不放手,不局限于简单的纠错,而是将错误的效益最大化,使得学生做到引以为戒,痛定思痛,进一步夯实基础知识和基本技能.

4　纠错后的反思

《普通高中数学课程标准(2017 年版)》提出培养学生数学抽象、逻辑推理、数学建模、数学运算、直观想象和数据分析六大数学核心素养.深度学习是提升学生数学核心素养发展的重要途径,深度学习的形式多种多样.作为深度学习的一种形式,纠错使教师、学生在教学中获得较大发展,使学生能够形成有助于未来可持续发展的核心素养.

4.1　"纠错"有利于养成良好的思维习惯

数学问题的解决强调环环紧扣、言之有据.良好的思维习惯在解决问题的时候,都是建立在"分析问题、提出假设、检验假设"三个环节中.在查找错误进行原因分析时,实际上就是检查哪个环节出了问题.前文提到的作业中存在的三个普遍错误都是出现在检验假设这个环节.纠错过程实际上是增加新知识和技能的过程,通过纠错能够有效促进学生深度学习.具有良好思维习惯的学生清楚地知道自己思考问题的方向,运用自己所掌握的知识和技能去解决问题的过程中,也清楚哪些问题可以解决、哪些问题通过努力可以解决、哪些问题需要借助外力.良好的思维习惯能够减少错误,也是完善自己的思维,从而避免陷入题海战术.

4.2　"纠错"有利于培养学生提出问题的能力

质疑是探究的方向标,而纠错是带着问题去学习,批判性思维使得问题越辨越明.从一个错误出发,学生自然而然关注于问题出在哪里.例如上述对于作业的纠错过程中,六个拓展问题使得学生对于定义域、值域以及单调性概念更清楚,也意识到审题不清、以偏概全、忽视新旧知识联系对于解决问题的影响.通过分析错误和初步拓展,不断提出新问题,来推进深度学习,将一个问题拓广到一类问题,进一步培养学生提出问题的能力.

4.3　"纠错"拓展深度学习的维度

不局限于找出错误,通过纠错以及以错为源开展的初步拓展,在教师适度引导下,进一步推进学生的深度学习.实际上运用所掌握的数学知识和技能去解决拓展的新问题是克服一个又一个壁垒,最终将纠错效益最大化的一种心理活动过程.例如作业所涉及的"已知给定区间上的递增(减)函数,求参数的取值范围"是高中数学中比较难的知识点,解决这类问题需要借助导数在单调性判定和恒成立问题中的应用,以及较高的运算能力和逻辑推理能力等综合素养.从只涉及一个参数的问题,逐步探究到含四、五个参数的拓展 5 和拓展 6,难度逐步增加,拓展深度学习的维度.

前苏联心理学家、教育家维果斯基的"最近发展区"理论认为学生的发展过程中有两种水平:一种是学生的现有水平,指在没有他人帮助的情况下独自解决问题达到的水平,简称为"现有发展水平".另一种是学生可能的发展水平,也就是在有帮助的情况下所达到的水平,称之为"潜在发展水平",这两者存在差距,这个差距就是最近发展区.根据高中生的认知水平和课堂教育教学规律,在"最近发展区"内设计教学活动,有利于将学生的"潜在发展水平"转化为"现有发展水平".教师在教学过程中应着眼于学生的最近发展区,为学生逐步提供带有难度的问题,然后在此基础上进行下一个发展区的发展."纠错"就是在学生的"最近发展区"内开展的深度学习,课堂气氛、参与程度等都能够有效促进学生在最近发展区内深度学习.在这种喜闻乐见的深度学习过程中,将错误向正确转化,进一步提升学生的元认知能力,达到弥补基础知识和基本技能的短板的效果,形成新的知识和技能.与此同时,通过适度引导推进深度探究来实现深度学习,强化思维的深度和广度,从而有利于学生逻辑思维能力、数学核心素养的发展.