

家的经济预算,从简单的技术革新到复杂的人造卫星的发射都离不开数学.而且,几乎所有的精密科学、力学、天文学、物理学甚至化学通常都是以一些数学公式来表达自己的定律的,并且在发展自己的理论的时候,广泛地运用数学这一工具.比如,在火箭、导弹发射之前,可以通过精密的计算,预测它的飞行轨道和着陆地点.

通过数学实用价值的教育,使学生不再认为数学是高深的脱离实际的理论,而是和我们的生活密切相关的,从而体会数学的实用价值,逐渐形成正确的数学观.

总之数学是人类文化的重要组成部分.数学是人类社会进步的产物,也是推动社会发展的动力.通过在高中阶段数学文化的学习,使学生初步了解数学科学与人类社会发

展之间的相互作用,体会数学的科学价值、应用价值、人文价值,开阔视野,寻求数学进步的历史轨迹,激发对于数学创新原动力的认识,感受优秀文化的熏陶,领会数学的美学价值,从而提高自身的文化素养和创新意识.

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准[M].北京:人民教育出版社,2003.
- [2] 数学课程标准研制组.普通高中数学课程标准(实验)解读[M].南京:江苏教育出版社,2004.
- [3] 王全林.高中数学新课程的实验与思考[J].中学数学教学参考,2005(9).
- [4] 郑毓信.“数学文化”与数学教育[J].中学数学教学参考,2005(10).
- [5] 易南轩.数学美拾趣[M].北京:科学出版社,2006.

“常用逻辑用语”教学解惑

季素月 (江苏省扬州大学数学科学学院 225002)

目前高中教材中的“常用逻辑用语”,内容虽然不多,却给未系统学过逻辑知识的中学数学教师的教学带来困难,在教学过程中常产生一些疑惑.本文试从开语句与量词入手,对这些困惑作出解释.

1 命题“奇数是质数”的否定是命题“奇数不是质数”吗?

要回答这个问题,必须说明什么样的语句是命题.教科书中规定:能够判断真假的语句叫做命题.可见,当一个语句的主项概念所指对象不确定时,这个语句就不是命题.因此,在数学中,含有变元的语句不是命题.如“ y 是偶数”,“ $x > y$ ”,“ $x+2=0$ ”,“ $\frac{x+1}{x-2} \geq 0$ ”等都不是命题.为表述方便起见,我们把无法判断其真假的含有变元的语句称为开语句.

虽然开语句不是命题,但在开语句前面加上对变元有所约束的量词,就成为可以判别真假的命题.一般地,设 $P(x)$ 是论域 U 上的开语句,在它前面加上表示论域中全体个体的量词 $\forall x$,得到全称命题 $\forall x, P(x)$ (读作“所有 x 具有性质 P ”、“每一个 x 具有性质 P ”);在 $P(x)$ 前面加上表示论域中部分个体的量词 $\exists x$,得到存在性命题 $\exists x, P(x)$ (读作“存在 x 具有性质 P ”、“有些 x 具有性质 P ”).必须注意,在用语言表达时,全称量词可以省略,存在量词不可以省略.比如,“美国人是黑人”就是省略了全称量词的命题.

如果把在论域 U 中使 $P(x)$ 成为真命题的集合记为 A (常称之为开语句 $P(x)$ 的真值集),则有

$\forall x, P(x)$ 是真命题当且仅当 $A = U$;

$\exists x, P(x)$ 是真命题当且仅当 $A \cap U \neq \emptyset$.

对于全称命题、存在性命题的否定有下列结论:

$$\neg(\forall x, P(x)) = \exists x, \neg P(x);$$

$$\neg(\exists x, P(x)) = \forall x, \neg P(x). \quad (*)$$

在日常生活及数学学习中经常涉及到 (*) 中的四种形式的命题:

(1) 全称肯定命题, 如“所有奇数是质数”(假); 这类命题可形式地记为 $\forall x, f(x)$.

(2) 全称否定命题, 如“所有的奇数不是质数”(假); 可形式地记为 $\forall x, \neg f(x)$.

(3) 存在肯定命题, 如“有些奇数是质数”(真); 可形式地记为 $\exists x, f(x)$.

(4) 存在否定命题, 如“有些奇数不是质数”(真). 可形式记为 $\exists x, \neg f(x)$.

在这四类命题中, 全称肯定与存在否定是一对矛盾命题, 全称否定与存在肯定是一对矛盾命题, 它们互为否定, 即一真一假、一假一真. 但是, 全称肯定与全称否定并不是矛盾命题, 它们可以同假, 但不可能同真. 特称肯定与特称否定也不是矛盾命题, 它们可以同真, 但不可能同假.

根据上述分析可以看出, 我们口语中表述的命题“奇数是质数”是省略了全称量词的全称命题: “所有的奇数是质数”. 所以其否定应该是“存在一些奇数不是质数”, 当然这是真命题. 由此类推, 在一些教参、辅导资料上出现的“正方形是菱形”的否定是“正方形不是菱形”, “三角形的三个外角和等于 360 度”的否定是“三角形的三个外角和不等 360 度”都是错误的, 因为这些原命题都是全称命题. 它们的否定应该分别是“有些正方形不是菱形”、“存在外角和不等 360 度的三角形”.

2 量词对逻辑联结词“且”、“或”可分配吗?

在教学过程中, 有些老师产生这样的困惑: 由逻辑联结词的真值定义, 由两个假命题组成的“P 或 Q”应该是假命题, 为什么由假命题“所有的实数是正数”、“所有的实数不是正数”组成的“P 或 Q”形式的复合命题“所有

的实数是正数或者不是正数”应该是真命题? 事实上, 这个问题与量词对逻辑联结词“且”、“或”的分配有关.

在数学中, “P 且 Q”, “P 或 Q”形式命题中有时也有量词出现. 比如,

“ $\forall x, x \geq 0$ 或 $x < 0$ ”, “ $\forall x, x \geq 0$ 或 $\forall x, x < 0$ ”; ①

“ $\exists x, x+1 < 0$ 且 $x^2+5x+6=0$ ”, “ $\exists x, x+1 < 0$ 且 $\exists x, x^2+5x+6=0$ ”. ②

可以看出, 在①中, 前者是真命题, 后者是假命题; 在②中, 前者是假命题, 而后者是真命题. 这说明, 在“P 且 Q”、“P 或 Q”形式的命题中, 量词不都是可分配的. 一般情况下, 有下列结论:

(1) $\forall x(P(x) \text{ 且 } Q(x)) = \forall x P(x) \text{ 且 } \forall x Q(x)$;

(2) $\exists x(P(x) \text{ 或 } Q(x)) = \exists x P(x) \text{ 或 } \exists x Q(x)$.

(3) $\forall x(P(x) \text{ 或 } Q(x)) \neq \forall x P(x) \text{ 或 } \forall x Q(x)$;

(4) $\exists x(P(x) \text{ 且 } Q(x)) \neq \exists x P(x) \text{ 且 } \exists x Q(x)$.

(1)、(2)式表明, 全称量词 $\forall x$ 对于逻辑联结词“且”具有可分配性, 存在量词 $\exists x$ 对于逻辑联结词“或”具有可分配性. 然而, 在(3)式中, 右端命题真, 则左端命题必真, 但反之不成立; 在(4)式中, 左端命题真, 则右端命题必真, 反之也不成立. 事实上, 由两个假命题“所有的实数是正数”、“所有的实数不是正数”组成的“P 或 Q”命题应该是“所有的实数是正数或者所有的实数不是正数”, 这当然是假命题, 由(3)可知, 它与命题“所有的实数是正数或者不是正数”不是同一个命题.

3 “若 P 则 Q”的否定是“若 P 则非 Q”吗?

一些教辅资料上给出这样的结论: 具有“若 P 则 Q”形式的命题的否定是“若 P 则非 Q”. 事实上, 这个结论是错误的.

我们先看“若 P 则 Q”的真值是如何规定的(见表 1).

表 1

P	Q	若 P 则 Q
真	真	真
真	假	假
假	真	真
假	假	真

下面举一个例子说明这种规定的合理性.

例 1 爸爸对小红作了一个许诺: 如果小红数学成绩得优(P), 那么他就带小红到黄山去旅游(Q). 于是就有四种可能发生:

(1) 小红数学成绩得优, 爸爸带小红去黄山旅游(P 真 Q 真);

(2) 小红数学成绩得优, 但爸爸没有带小红去黄山旅游(P 真 Q 假);

(3) 小红数学成绩没有得优, 爸爸仍然带她去黄山旅游(P 假 Q 真);

(4) 小红数学没有得优, 爸爸没有带小红去旅游(P 假 Q 假).

毫无疑问, 情况(1)说明爸爸遵守了诺言, 所以“若 P 则 Q ”真; 在(3)、(4)两种情况下, 由于小红没有得优, 所以不管爸爸有没有带小红去黄山旅游, 都不能说爸爸违背了诺言, “若 P 则 Q ”仍然真; 只有情况(2)说明爸爸没有信守诺言, 此时“若 P 则 Q ”假.

例 1 说明了两点, 其一, 命题“若 P 则 Q ”的真值定义与我们日常思维是一致的; 其二, 只有当“ P 真且 Q 假”时, 命题“若 P 则 Q ”为假. 因此, “若 P 则 Q ”的否定应该是“ P 且非 Q ”, 而不是“若 P 则非 Q ”, 这个结论也可以由下列真值表验证.

表 2

P	Q	非 Q	P 且非 Q	若 P 则 Q	若 P 则非 Q
真	真	假	假	真	假
真	假	真	真	假	真
假	真	假	假	真	真
假	假	真	假	真	真

由表 2 可以看出, 命题“若 P 则 Q ”与命题“ P 且非 Q ”的真值是一真一假、一假一真, 因此, 这两个命题互为否定. 而“若 P 则 Q ”与

“若 P 则非 Q ”不具有这样的关系.

4 否命题与命题的否定是一回事吗?

在数学中经常出现“若 $P(x)$ 则 $Q(x)$ ”的语句. 事实上, 它不是开语句, 而是全称命题, 只不过人们在用语言表达时省略了全称量词. 比如,

“被 8 整除的数能被 4 整除”即为“ $\forall x$ (若 x 能被 8 整除, 则 x 能被 4 整除);

“若 $x^2 < 4$, 则 $x < 2$ ”即为“ $\forall x$ (若 $x^2 < 4$, 则 $x < 2$), 等等.

因此, 在日常数学学习中, 形如“若 $P(x)$ 则 $Q(x)$ ”的语句都是全称命题, 数学中多数定理与命题都具有这种形式.

我们知道, 具有“若 p 则 q ”形式的假言命题有四种不同的形式. 同样, 把命题“若 $P(x)$, 则 $Q(x)$ ”中的 $P(x)$, $Q(x)$ 换位换质, 也可以得到其他几种命题形式:

原命题: 若 $P(x)$ 则 $Q(x)$;

逆命题: 若 $Q(x)$ 则 $P(x)$;

否命题: 若非 $P(x)$ 则非 $Q(x)$;

逆否命题: 若非 $Q(x)$ 则非 $P(x)$.

必须注意, “若 $P(x)$, 则 $Q(x)$ ”的四种形式都是全称命题, 只不过在表述时省略了全称量词. 因此如果要写出命题“若 $P(x)$ 则 $Q(x)$ ”的否定, 就必须把全称量词添上, 然后再加以否定, 即有

$\neg(\forall x(\text{若 } P(x) \text{ 则 } Q(x))) = \exists x(P(x) \text{ 且 非 } Q(x)).$

例 2 写出命题“若 a 和 b 是偶数, 则 $a+b$ 是偶数”的逆命题、否命题、逆否命题及其否定, 并说明它们的真假.

解 原命题: $\forall a \forall b$ (若 a, b 都是偶数, 则 $a+b$ 是偶数)(真);

逆命题: $\forall a \forall b$ (若 $a+b$ 是偶数, 则 a, b 都是偶数)(假);

否命题: $\forall a \forall b$ (若 a, b 不都是偶数, 则 $a+b$ 不是偶数)(假);

逆否命题: $\forall a \forall b$ (若 $a+b$ 不是偶数, 则 a, b 不都是偶数)(真);

原命题的否定: $\exists a \exists b$ (a, b 是偶数并且 $a+b$ 不是偶数), 即“存在两个偶数, 而其和不是偶数”. 显然这是假命题.

从例2可以看出, “否命题”与“命题的否定”是两个完全不同的概念. 首先, 对象不同, 否命题仅针对具有“若 P 则 Q ”形式的命题而言的, 而任一个命题都可以写出它的否定. 其次, 命题的否定与原命题是一对矛盾命题, 两者一真一假, 或一假一真, 而原命题与否命题则不然, 两者可能同真、同假, 也可能一真一假. 最后, 对于全称命题 $\forall x$ (若 $P(x)$ 则 $Q(x)$)

而言, 它的否定是存在性命题 $\exists x(P(x) \text{ 且 } \neg Q(x))$, 而它的否命题仍然是全称命题 $\forall x$ (若非 $P(x)$ 则非 $Q(x)$).

参考资料

- [1] [日]末木刚博等著, 孙中原等译. 逻辑学——知识的基础 [M]. 北京: 中国人民大学出版社, 1984.
- [2] 张奠宙, 邹一心. 现代数学与中学数学 [M]. 上海: 上海教育出版社, 1990.
- [3] 季素月. 中学数学概念原理与方法 [M]. 南京: 广西师范大学出版社, 1991.

浅谈在新课程背景下高中数学教师如何授课

王海赳 (江苏省木渎高级中学 215101)

传统授课强调教学结果、预设与生成, 而新课程关注情感态度与价值观、好奇心、求知欲、自信心、不怕困难的意志, 对数学价值的认识, 实事求是的态度, 质疑与独立思考的习惯, 推理精神等. 新课程之所以强调知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观, 并倡导“自主、合作、探究”式的学习, 目的在于学生的终身发展. 在这一大背景下, 教师的授课自然也要顺应以学生为本, 引导他们养成良好的思维习惯, 培养终身学习的观念, 掌握受用一生的良好学习方法. 下面就结合笔者的教学体会, 谈谈在这样的指导原则下, 我们该如何授课.

1 老师须脑中有书: 领会教材内涵, 成为学生的良师益友

教师需要深入理解教材. 传统教学中, 教材几乎无一例外地被视做了例文, 上升到了律条的高度予以膜拜而教条式占有. 教师和学生无条件地接受教材的思想, 从教材中获取到或是人文、或是工具性的知识. 而新课程带来的一个变化, 就是教材不只被当作拥有

唯一解读方式的“范文”或条规, 师生都拥有了对教材进行多元解读和创造的权利. 同时, 教材还可以仅仅被作为一种“引文”, 作为借以引出教师教学目标的桥梁. 这种教材自身身份的变化, 实际上也就决定了教师教学中的灵活多样性.

案例1 两角和与差的正切(教材处理)

教材在处理这段内容时, 通过回顾如何求 $\tan 15^\circ$ 的值, 探讨如何用 $\tan 45^\circ$ 和 $\tan 30^\circ$ 直接求 $\tan 15^\circ$ 的值. 进而得出两角和与差的正切公式, 然后说明公式的形式和特点, 最后由三个例题从计算、求证及简单的应用三个方面说明了如何应用两角和与差正切公式.

笔者在处理这段教材时, 发现按教材顺序上课学生也能学会, 也可以应用公式解题, 但是学生没有了学习这段内容的激情, 更没有了深入探究问题的欲望.

本着从学生实际出发的理念, 笔者在教学这段内容时作了如下设计:

问题情境→数学结构→品味数学→数学应用→回顾反思→反馈练习

教学通过以下两个问题引入.