

数列求和问题选讲

典题直击

例 1. (06 年北京卷)

设 $f(n) = 2 + 2^4 + 2^7 + \cdots + 2^{3n+10} = (\quad)$

A. $\frac{2(8^n - 1)}{7}$

B. $\frac{2(8^{n+1} - 1)}{7}$

C. $\frac{2(8^{n+3} - 1)}{7}$

D. $\frac{2(8^{n+4} - 1)}{7}$

例2. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2, S_n = 4a_{n+1} + 1$, 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

例 3. 若已知 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n = 2n - 1$, 数列 $\{b_n\}$ 的通项为 $b_n = 2^n$, 求数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和.

例 4. 已知 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n = \frac{1}{n(n+2)}$, 求数列的前 n 项和 S_n .

例 4. 已知 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n = \frac{1}{n(n+2)}$, 求数列的前 n 项和 S_n .

$$a_n = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) = ?$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \end{aligned}$$

划斜线消项不靠谱

例 5. (11 年安徽卷) 在数 1 和 100 之间插入 n 个实数, 使得这 $n+2$ 个数构成递增的等比数列, 将这 $n+2$ 个数的乘积记作 T_n , 再令 $a_n = \lg T_n, n \geq 1$

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

例 5. (11 年安徽卷)

(II) 设 $b_n = \tan a_n \cdot \tan a_{n+1}$,

求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

分析: 由 (I) 得 $a_n = n + 2$



头脑

风暴：

你能用裂项相消法求例 3 吗？

$$\begin{aligned}a_n b_n &= (2n-1)2^n \\ &= f(n+1) - f(n)\end{aligned}$$

用公式法求和：注意使用公式的前提，明确基本量

怎么把错位相减法计算风险降到最低？

① 错位 ② 符号 ③ 项数 ④ 特殊检验

裂项相消法怎么消项？

找规律，消去重叠的项

常见的裂项方法有哪些？

常见的拆项方法有哪些？

$$1.a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$2.a_n = \frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right)$$

$$3.a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$4.a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$$

$$5.a_n = n(n+1) = \frac{1}{3} [n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1)]$$

$$6.a_n = n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4} [n(n+1)(n+2)(n+3) - (n-1)n(n+1)(n+2)]$$

$$7.a_n = n \cdot n! = (n+1)! - n!$$

$$8.a_n = \frac{1}{\sqrt{n+k} + \sqrt{n}} = \frac{1}{k} (\sqrt{n+k} - \sqrt{n})$$

数列求和这类题分值较大，难度不大，
但“坑”比较多. 分析被“坑”的原因有三：

其一. 被细节“坑”了（考虑问题不严谨, 不全面）；

其二. 被规范“坑”了（书写、解题不规范）；

其三. 被方法“坑”了（没有理解方法的本质和内涵）.



求和问题是高考中数列问题的一个高频考点，
对这一类问题，我们不仅要会做，还要做对，做全拿满分。

- 1.求和问题首先分析通项特征(平日收集整理)，
能够进行模式识别；
- 2.熟悉数列求和常见的几种方法及原理，
问渠哪得清如许，为有源头活水来；
- 3.规范解题，养成习惯，很多粗心都是解题不规范引起的。

小试身手(15分钟)

1. (2011 辽宁卷) 求数列 $\left\{\frac{2-n}{2^{n-1}}\right\}$ 的前 n 项和.

1. 【答案】 $S_n = \frac{n}{2^{n-1}}.$

2. (2013 江西理科) 已知 $b_n = \frac{n+1}{4n^2(n+2)^2}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

证明: 对于任意的 $n \in N^*$, 都有 $T_n < \frac{5}{64}$.

2. 【提示】

$$b_n = \frac{n+1}{4n^2(n+2)^2} = \frac{1}{16} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2} \right]$$

3*. (2012 华约联盟自主招生)

已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \lg(1 + \frac{2}{n^2 + 3n})$, $n = 1, 2, \dots$,

S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 $S_n =$ _____.

3. 【答案】 $S_n = \lg \frac{100(n+1)}{n+3}.$

微语录：

谈细节

使人疲惫不堪的不是远方的高山，而是鞋里的一粒沙子。