江苏省泰州市2019—2020学年度第二学期调研测试

高三数学试题

第I卷（必做题，共160分）

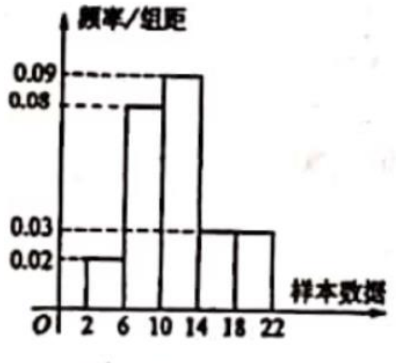
一、填空题（本大题共14小题，每小题5分，共70分，请将答案填写在答题卷相应的位置上.）

1．已知集合A＝{1，2}，B＝{2，4，8}，则A$\cup$B＝_______.

2．若实数x，y满足x＋yi＝－1＋(x－y)i（i是虚数单位），则xy＝_______.

3．如图是容量为100的样本的频率分布直方图，则样本数据落在区间[6，18)内的频数为_______.

4．根据如图所示的伪代码，可得输出的S的值为_______.



（第3题图）

```
I ← 1
While  I < 5
  I ← I + 2
  S ← I + 3
End  While
Print  S
```

（第4题图）

5．若双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$($a$>0，$b$>0)的一条渐近线方程为$y=2x$，则该双曲线的离心率为_______.

6．将一颗质地均匀的骰子（一种各个面上分别标有1，2，3，4，5，6个点的正方体玩具）先后抛掷2次，这两次出现向上的点数分别记为x，y，则$|x-y|=1$的概率是_______.

7．在平面直角坐标系xOy中，抛物线y^2＝4x上一点P到焦点F的距离是它到y轴距离的3倍，则点P的横坐标为_______.

8．我国古代数学名著《增删算法统宗》中有这样一首数学诗："三百七十八里关，初日健步不为难，次日脚痛减一半，六朝才得到其关."它的大意是：有人要到某关口，路程为378里，第一天健步行走，从第二天起，由于脚痛，每天走的路程都是前一天的一半，一共走了六天到达目的地．那么这个人第一天走的路程是_______里.

9.若定义在R上的奇函数$f(x)$满足$f(x+4)=f(x)$，$f(1)=1$，则$f(6)+f(7)+f(8)$的值为_______.

10．将半径为R的半圆形铁皮卷成一个圆锥的侧面，若圆锥的体积为$9\sqrt{3}\pi$，则R＝_______.

11．若函数$f(x)=\begin{cases}x+a，& x\ge a\\ x^2-1，& x<a\end{cases}$只有一个零点，则实数$a$的取值范围为_______.

12．在平面直角坐标系xOy中，已知点A(x_1，y_1)，B(x_2，y_2)在圆O：$x^2+y^2=4$上，且满足$x_1x_2+y_1y_2=-2$，则$x_1+x_2+y_1+y_2$的最小值是_______.

13．在锐角△ABC 中，点 D，E，F 分别在边 AB，BC，CA 上，若 $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AF}$，且 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}=2\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{ED}=0$，$\left|\overrightarrow{ED}\right|=1$，则实数 λ 的值为_______.

14. 在△ABC 中，点 D 在边 BC 上，且满足 AD＝BD，$3\tan^2B-2\tan A+3=0$，则 $\dfrac{BD}{CD}$ 的取值范围为_______.

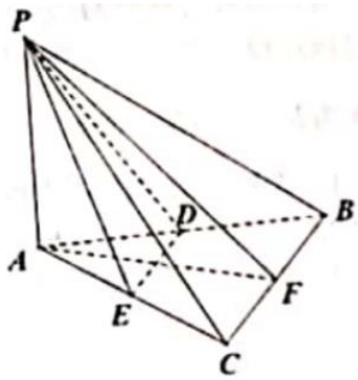
二、解答题（本大题共 6 小题，共计 90 分，请在答题纸指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

15.（本小题满分 14 分）

如图，在三棱锥 P—ABC 中，PA⊥平面 ABC，AB＝AC，点 D，E，F 分别是 AB，AC，BC 的中点.

（1）求证：BC∥平面 PDE；

（2）求证：平面 PAF ⊥平面 PDE.



16.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=\sin^2 x+\sin x\cos x-\dfrac{1}{2}$，$x\in R$.

（1）求函数 $f(x)$ 的最大值，并写出相应的 x 的取值集合；

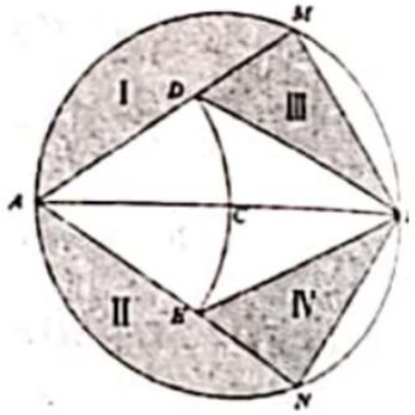
（2）若 $f(\alpha)=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$，$\alpha\in(-\dfrac{\pi}{8}，\dfrac{3\pi}{8})$，求 $\sin2\alpha$ 的值.

17．（本小题满分 14 分）

某温泉度假村拟以泉眼 C 为圆心建造一个半径为 12 米的圆形温泉池，如图所示，M，N 是圆 C 上关于直径 AB 对称的两点，以 A 为四心，AC 为半径的圆与圆 C 的弦 AM，AN 分别交于点 D，E，其中四边形 AEBD 为温泉区，I、II 区域为池外休息区，III、IV 区域为池内休息区，设∠MAB＝θ．

（1）当$\theta=\dfrac{\pi}{4}$时，求池内休息区的总面积（III 和 IV 两个部分面积的和）；

（2）当池内休息区的总面积最大时，求 AM 的长．



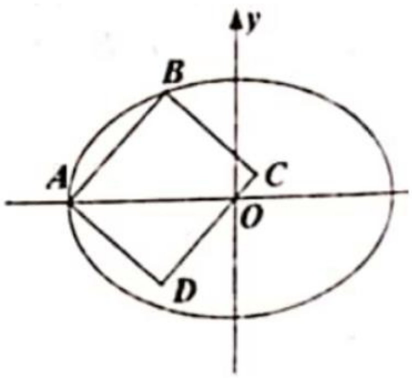
18．（本小题满分 16 分）

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 M：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左顶点为 A，过点 A 的直线与椭圆 M 交于 x 轴上方一点 B，以 AB 为边作矩形 ABCD，其中直线 CD 过原点 O．当点 B 为椭圆 M 的上顶点时，△AOB 的面积为 b，且 AB＝$\sqrt{3}b$．

（1）求椭圆 M 的标准方程；

（2）求矩形 ABCD 面积 S 的最大值；

（3）矩形 ABCD 能否为正方形？请说明理由．



19．（本小题满分 16 分）

定义：若一个函数存在极大值，且该极大值为负数，则称这个函数为“YZ 函数”.

（1）判断函数 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}-1$ 是否为“YZ 函数”，并说明理由；

（2）若函数 $g(x)=\ln x-mx$ ($m\in$ R)是“YZ 函数”，求实数 m 的取值范围；

（3）已知 $h(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}ax^2+bx-\dfrac{1}{3}b$，$x\in(0，+\infty)$，$a$，$b\in$ R，求证：当 $a\leqslant-2$，且 $0<b<1$ 时，函数 $h(x)$ 是“YZ 函数”.

20．（本小题满分 16 分）

已知数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 满足 $b_n=a_{n+2}-a_n$，$c_n=2a_{n+1}+a_n$.

（1）若数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，试判断数列 $\{c_n\}$ 是否为等比数列，并说明理由；

（2）若 a_n 恰好是一个等差数列的前 n 项和，求证：数列 $\{b_n\}$ 是等差数列；

（3）若数列 $\{b_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，数列 $\{c_n\}$ 是等差数列，求证：数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

第 II 卷（附加题，共 40 分）

21．【选做题】本题包括 A，B，C 三小题，请选定其中两题作答，每小题 10 分共计 20 分，解答时应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

A．选修 4—2：矩阵与变换

已知列向量$\begin{bmatrix} a \\ 5 \end{bmatrix}$在矩阵 M＝$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$对应的变换下得到列向量$\begin{bmatrix} b-2 \\ b \end{bmatrix}$，求 $M^{-1}\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$．

B．选修 4—4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为$\begin{cases} x=\cos\alpha \\ y=\sqrt{3}\sin\alpha \end{cases}$（$\alpha$ 为参数)．以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=4\sqrt{2}$，点 P 为曲线 C 上任一点，求点 P 到直线 l 距离的最大值．

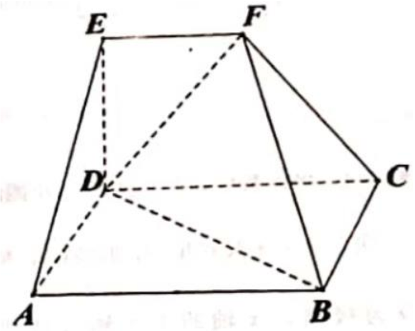
【必做题】第 22 题、第 23 题，每题 10 分，共计 20 分，解答时应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

22．（本小题满分 10 分）

如图，在多面体 ABCDEF 中，平面 ADE⊥平面 ABCD，四边形 ABCD 是边长为 2 的正方形，△ADE 是等腰直角三角形，且∠ADE＝$\frac{\pi}{2}$，EF⊥平面 ADE，EF＝1．

（1）求异面直线 AE 和 DF 所成角的余弦值；

（2）求二面角 B—DF—C 的余弦值．



23．（本小题满分 10 分）

给定 $n(n\geqslant 3，n\in \mathrm{N}^{*})$个不同的数 1，2，3，⋯，$n$，它的某一个排列 P 的前 $k(k\in \mathrm{N}^{*}，1\leqslant k\leqslant n)$项和为 S_k，该排列 P 中满足 $2S_k\le S_n$ 的 k 的最大值为 k_P．记这 n 个不同数的所有排列对应的 k_P 之和为 T_n．

（1）若 $n=3$，求 T_3；

（2）若 $n=4l+1$，$l\in \mathrm{N}^{*}$，①证明：对任意的排列 P，都不存在 $k(k\in \mathrm{N}^{*}，1\leqslant k\leqslant n)$使得 $2S_k=S_n$；②求 T_n (用 n 表示).

2019～2020学年度第二学期调研测试
高三数学答案

一、填空题

1. $\{1,2,4,8\}$　　2. $\frac{1}{2}$　　3. 80　　4. 8　　5. $\sqrt{5}$

6. $\frac{5}{18}$　　7. $\frac{1}{2}$　　8. 192　　9. -1　　10. 6

11. $(-\infty -1]\bigcup(0,1]$　　12. $-2\sqrt{2}$　　13. 3　　14. $(1,2]$

二、解答题

15.（本题满分 14 分）

证明：（1）在ΔABC中，因为D,E分别是AB,AC的中点，

所以$DE//BC$，　　……………2 分

因为$BC\not\subset$平面PDE，$DE\subset$平面PDE，

所以$BC//$平面PDE.　　……………6 分

（2）因为$PA\perp$平面ABC，$DE\subset$平面PDE，

所以$PA\perp DE$，

在ΔABC中，因为$AB=AC$，F分别是BC的中点，

所以$AF\perp BC$，　　……………8 分

因为$DE//BC$，所以$DE\perp AF$，

又因为$AF\bigcap PA=A$，$AF\subset$平面$PAF,PA\subset$平面PAF，

所以$DE\perp$平面PAF，　　……………12 分

因为$DE\subset$平面PDE，所以平面$PAF\perp$平面PDE.　　……………14 分

16.（本题满分 14 分）

解：（1）因为$f(x)=\sin^2 x+\sin x\cos x-\frac{1}{2}$，

所以$f(x)=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\sin 2x-\cos 2x)$　　……………2 分

$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2x\cos\frac{\pi}{4}-\cos 2x\sin\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$　　……………4 分

当$2x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z})$，即$x=k\pi+\frac{3\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$时，$f(x)$取最大值$\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $f(x)$ 的最大值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，此时 x 的取值集合为 $\left\{x \middle| x = k\pi + \dfrac{3\pi}{8}, k \in \mathbf{Z}\right\}$. ………7 分

（2）因为 $f(\alpha)=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$，则 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(2\alpha-\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$，即 $\sin(2\alpha-\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{1}{3}$，

因为 $\alpha\in(-\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{8},\dfrac{3\boldsymbol{\pi}}{8})$，所以 $2\alpha-\dfrac{\pi}{4}\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$，

则 $\cos(2\alpha-\dfrac{\pi}{4})=\sqrt{1-\sin^2(2\alpha-\dfrac{\pi}{4})}=\sqrt{1-(\dfrac{1}{3})^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$， ……………10 分

所以 $\sin 2\alpha=\sin[(2\alpha-\dfrac{\pi}{4})+\dfrac{\pi}{4}]=\sin(2\alpha-\dfrac{\pi}{4})\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos(2\alpha-\dfrac{\pi}{4})\sin\dfrac{\pi}{4}$

$=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{4+\sqrt{2}}{6}$. ……………14 分

17.（本题满分 14 分）

解：（1）在 $Rt\Delta ABM$ 中，因为 $AB=24$， $\theta=\dfrac{\pi}{4}$，

所以 $MB=AM=12\sqrt{2}$， $MD=24\cos\dfrac{\pi}{4}-12=12\sqrt{2}-12$，

所以池内休息区总面积 $S=2\cdot\dfrac{1}{2}MB\cdot DM=12\sqrt{2}(12\sqrt{2}-12)=144(2-\sqrt{2})$.

……………4 分

（2）在 $Rt\Delta ABM$ 中，因为 $AB=24$， $\angle MAB=\theta$，

所以 $MB=24\sin\theta, AM=24\cos\theta$， $MD=24\cos\theta-12$，

由 $MB=24\sin\theta>0, MD=24\cos\theta-12>0$ 得 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$， ……………6 分

则池内休息区总面积 $S=2\cdot\dfrac{1}{2}MB\cdot DM=24\sin\theta(24\cos\theta-12)$， $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$；

……………9 分

设 $f(\theta)=\sin\theta(2\cos\theta-1)$， $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$，因为

$f'(\theta)=\cos\theta(2\cos\theta-1)-2\sin^2\theta=4\cos^2\theta-\cos\theta-2=0\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{1\pm\sqrt{33}}{8}$，

又 $\cos\theta=\dfrac{1+\sqrt{33}}{8}>\dfrac{1}{2}$，所以 $\exists\theta_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$，使得 $\cos\theta_0=\dfrac{1+\sqrt{33}}{8}$，

则当 $x\in(0,\theta_0)$ 时， $f'(\theta)>0\Rightarrow f(\theta)$ 在 $(0,\theta_0)$ 上单调增，

当 $x\in\left(\theta_0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ 时，$f'\left(\theta\right)<0\Rightarrow f\left(\theta\right)$ 在 $\left(0,\theta_0\right)$ 上单调减，

即 $f\left(\theta_0\right)$ 是极大值，也是最大值，所以 $f_{\max}\left(\theta\right)=f\left(\theta_0\right)$，

此时 $AM=24\cos\theta_0=3+3\sqrt{33}$. ……………13 分

答：（1）池内休息区总面积为 $144(2-\sqrt{2})\text{m}^2$；

（2）池内休息区总面积最大时 AM 的长为 $AM=(3+3\sqrt{33})\text{m}$. ………14 分

18.（本题满分 16 分）

解：（1）由题意：$\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3}b\\ \dfrac{1}{2}ab=b\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得 $a=2,b=c=\sqrt{2}$，

所以椭圆 M 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$. ……………4 分

（2）显然直线 AB 的斜率存在，设为 k 且 $k>0$，

则直线 AB 的方程为 $y=k(x+2)$，即 $kx-y+2k=0$，

联立 $\begin{cases}y=k(x+2)\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2+8k^2x+8k^2-4=0$，

解得 $x_B=\dfrac{2-4k^2}{1+2k^2}$，$y_B=\dfrac{4k}{1+2k^2}$，所以 $AB=\sqrt{(x_B+2)^2+{y_B}^2}=\dfrac{4\sqrt{1+k^2}}{1+2k^2}$，

直线 CD 的方程为 $y=kx$，即 $kx-y=0$，所以 $BC=\dfrac{|2k|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{2k}{\sqrt{1+k^2}}$，

所以矩形 $ABCD$ 面积 $S=\dfrac{4\sqrt{1+k^2}}{1+2k^2}\cdot\dfrac{2k}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{8k}{1+2k^2}=\dfrac{8}{\dfrac{1}{k}+2k}\leqslant\dfrac{8}{2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，

所以当且仅当 $k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，矩形 $ABCD$ 面积 S 的最大值为 $2\sqrt{2}$. ……………11 分

（3）若矩形 $ABCD$ 为正方形，则 $AB=BC$，

即 $\dfrac{4\sqrt{1+k^2}}{1+2k^2}=\dfrac{2k}{\sqrt{1+k^2}}$，则 $2k^3-2k^2+k-2=0\ \ (k>0)$，

令 $f(k)=2k^3-2k^2+k-2(k>0)$，

因为 $f(1)=-1<0, f(2)=8>0$，又 $f(k)=2k^3-2k^2+k-2(k>0)$ 的图象不间断，

所以 $f(k)=2k^3-2k^2+k-2(k>0)$ 有零点，所以存在矩形 $ABCD$ 为正方形.

……………16 分

19.（本题满分 16 分）

解：（1）函数 $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}-1$ 是“YZ 函数”，理由如下：

因为 $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}-1$，则 $f'(x)=\dfrac{1-x}{\mathrm{e}^x}$，

当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}-1$ 的极大值 $f(1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}-1<0$，

故函数 $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}-1$ 是“YZ 函数”. ……………4 分

（2）定义域为 $(0,+\infty)$，$g'(x)=\dfrac{1}{x}-m$，

当 $m\le 0$ 时，$g'(x)=\dfrac{1}{x}-m>0$，函数单调递增，无极大值，不满足题意；

当 $m>0$ 时，当 $0<x<\dfrac{1}{m}$ 时，$g'(x)=\dfrac{1}{x}-m>0$，函数单调递增，

当 $x>\dfrac{1}{m}$ 时，$g'(x)=\dfrac{1}{x}-m<0$，函数单调递减，

所以 $g(x)$ 的极大值为 $g(\dfrac{1}{m})=\ln\dfrac{1}{m}-m\cdot\dfrac{1}{m}=-\ln m-1$，

由题意知 $g(\dfrac{1}{m})=-\ln m-1<0$，解得 $m>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. ……………10 分

（3）**证明：** $h'(x)=x^2+ax+b$，

因为 $a\le -2$，$0<b<1$，则 $\Delta=a^2-4b>0$，

所以 $h'(x)=x^2+ax+b=0$ 有两个不等实根，设为 x_1,x_2，

因为 $\begin{cases}x_1+x_2=-a>0\\ x_1x_2=b>0\end{cases}$，所以 $x_1>0,x_2>0$，不妨设 $0<x_1<x_2$，

当 $0<x<x_1$ 时，$h'(x)>0$，则 $h(x)$ 单调递增；

当 $x_1 < x < x_2$ 时，$h'(x) < 0$，则 $h(x)$ 单调递减，

所以 $h(x)$ 的极大值为 $h(x_1) = \frac{1}{3}x_1^3 + \frac{1}{2}ax_1^2 + bx_1 - \frac{1}{3}b$，　　　　……………13 分

由 $h'(x_1) = x_1^2 + ax_1 + b = 0$ 得 $x_1^3 = x_1(-ax_1 - b) = -ax_1^2 - bx_1$，

因为 $a \leqslant -2$，$0 < b < 1$，

所以 $h(x_1) = \frac{1}{3}x_1^3 + \frac{1}{2}ax_1^2 + bx_1 - \frac{1}{3}b = \frac{1}{3}(-ax_1^2 - bx_1) + \frac{1}{2}ax_1^2 + bx_1 - \frac{1}{3}b$

$= \frac{1}{6}ax_1^2 + \frac{2}{3}bx_1 - \frac{1}{3}b \le -\frac{1}{3}x_1^2 + \frac{2}{3}bx_1 - \frac{1}{3}b$

$= -\frac{1}{3}(x_1 - b)^2 + \frac{1}{3}b(b-1) < 0$.

所以函数 $h(x)$ 是“YZ 函数”.　　　　……………16 分

（其他证法相应给分）

20.（本题满分 16 分）

解：（1）设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则 $c_n = 2a_{n+1} + a_n = 2a_nq + a_n = (2q+1)a_n$，

当 $q = -\frac{1}{2}$ 时，$c_n = 0$，数列 $\{c_n\}$ 不是等比数列，　　　　……………2 分

当 $q \neq -\frac{1}{2}$ 时，因为 $c_n \neq 0$，所以 $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(2q+1)a_{n+1}}{(2q+1)a_n} = q$，所以数列 $\{c_n\}$ 是等比数列.　　　　……………5 分

（2）因为 a_n 恰好是一个等差数列的前 n 项和，设这个等差数列为 $\{d_n\}$，公差为 d，

因为 $a_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$，所以 $a_{n+1} = d_1 + d_2 + \cdots + d_n + d_{n+1}$，

两式相减得 $a_{n+1} - a_n = d_{n+1}$，

因为 $a_{n+2} = a_n + b_n$，

所以 $b_{n+1} - b_n = (a_{n+3} - a_{n+1}) - (a_{n+2} - a_n) = (a_{n+3} - a_{n+2}) - (a_{n+1} - a_n) = d_{n+3} - d_{n+1} = 2d$，

所以数列 $\{b_n\}$ 是等差数列.　　　　……………10 分

（3）因为数列 $\{c_n\}$ 是等差数列，所以 $c_{n+3} - c_{n+2} = c_{n+1} - c_n$，

又因为 $c_n = 2a_{n+1} + a_n$，所以 $2a_{n+4} + a_{n+3} - (2a_{n+3} + a_{n+2}) = 2a_{n+2} + a_{n+1} - (2a_{n+1} + a_n)$，

即 $2(a_{n+4} - a_{n+2}) = (a_{n+3} - a_{n+1}) + (a_{n+2} - a_n)$，则 $2b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$，

又因为数列$\{b_n\}$是等比数列，所以$b_{n+1}^2=b_nb_{n+2}$，则$b_{n+1}^2=b_n\cdot\dfrac{b_{n+1}+b_n}{2}$，

即$(b_{n+1}-b_n)(2b_{n+1}+b_n)=0$，

因为数列$\{b_n\}$各项均为正数，所以$b_{n+1}=b_n$，　　　　　　　　……………13 分

则$a_{n+3}-a_{n+1}=a_{n+2}-a_n$，

即$a_{n+3}=a_{n+2}+a_{n+1}-a_n$，

又因为数列$\{c_n\}$是等差数列，所以$c_{n+2}+c_n=2c_{n+1}$，

即$(2a_{n+3}+a_{n+2})+(2a_{n+1}+a_n)=2(2a_{n+2}+a_{n+1})$，

化简得$2a_{n+3}+a_n=3a_{n+2}$，将$a_{n+3}=a_{n+2}+a_{n+1}-a_n$代入得

$2(a_{n+2}+a_{n+1}-a_n)+a_n=3a_{n+2}$，

化简得$a_{n+2}+a_n=2a_{n+1}$，所以数列$\{a_n\}$是等差数列.　　　　　……………16 分

（其他证法相应给分）

数学Ⅱ（附加题）

21. A.　[选修 4-2：矩阵与变换]（本小题满分 10 分）

解：因为$\begin{bmatrix}3&4\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b-2\\b\end{bmatrix}$，所以$\begin{cases}3a+20=b-2\\a+10=b\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=-6\\b=4\end{cases}$，　……………4 分

设$M^{-1}=\begin{bmatrix}m&p\\n&q\end{bmatrix}$，则$\begin{bmatrix}3&4\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m&p\\n&q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，

即$\begin{cases}3m+4n=1\\3p+4q=0\\m+2n=0\\p+2q=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}m=1\\n=-\dfrac{1}{2}\\p=-2\\q=\dfrac{3}{2}\end{cases}$，　所以$M^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2\\-\dfrac{1}{2}&\dfrac{3}{2}\end{bmatrix}$，　　　　……………8 分

所以$M^{-1}\begin{bmatrix}b\\a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2\\-\dfrac{1}{2}&\dfrac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16\\-11\end{bmatrix}$.　　　　……………10 分

B. [选修 4-4：坐标系与参数方程]（本小题满分 10 分）

解：由题：直线方程即为 $\rho(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4})=4\sqrt{2}$，

由 $\rho\cos\theta=x$， $\rho\sin\theta=y$ 得直线的直角坐标方程为 $x+y-8=0$，……………4 分

设 P 点的坐标为 $\left(\cos\alpha,\sqrt{3}\sin\alpha\right)$，

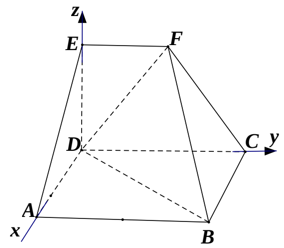
$\therefore$ 点 P 到直线的距离 $d=\dfrac{\left|\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha-8\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{\left|2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-8\right|}{\sqrt{2}}$， ……………8 分

当 $\alpha+\frac{\pi}{6}=2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即 $\alpha=2k\pi-\frac{2}{3}\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时， d 取得最大值 $5\sqrt{2}$，

此时点 P 的坐标为 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$. ……………10 分

22.（本小题满分 10 分）

解：因为平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCD$, 又 $\angle ADE=\frac{\pi}{2}$，



即 $DE\perp AD$，因为 $DE\subset$ 平面 ADE，

平面 $ADE\cap$ 平面 $ABCD=AD$， $\therefore DE\perp$ 平面 $ABCD$，

由四边形 $ABCD$ 为边长为 2 的正方形,

所以 DA,DC,DE 两两互相垂直.

以 D 为坐标原点，$\{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}\}$ 为一组基底建立如图所示的空间直角坐标系.………2 分

由 $EF\perp$ 平面 ADE 且 $EF=1$，

$\therefore D(0,0,0),A(2,0,0),E(0,0,2),C(0,2,0),B(2,2,0),F(0,1,2)$，

（1）$\overrightarrow{AE}=(-2,0,2),\overrightarrow{DF}=(0,1,2)$，

则 $\cos<\overrightarrow{AE},\overrightarrow{DF}>=\dfrac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DF}}{\left|\overrightarrow{AE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DF}\right|}=\dfrac{4}{2\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，

所以 AE 和 DF 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. ……………5 分

（2）$\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{DF}=(0,1,2)$，设平面 BDF 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DB}=2x+2y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DF}=y+2z=0\end{cases}$，取 $z=1$，得 $\vec{n}=(2,-2,1)$，

$\because$ 平面 DFC 的一个法向量为 $\vec{m}=(1,0,0)$,

$\therefore \cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{2}{3\times 1}=\dfrac{2}{3}$,

由二面角 $B-DF-C$ 的平面角为锐角, 所以二面角 $B-DF-C$ 的余弦值为 $\dfrac{2}{3}$. ……10 分

23.（本小题满分 10 分）

解:（1）$1,2,3$ 的所有排列为 $1,2,3;1,3,2;2,1,3;2,3,1;3,1,2;3,2,1$，

因为 $S_3=6$，所以对应的 k_P 分别为 $2,1,2,1,1,1$，所以 $T_3=8$； ……………3 分

（2）(i) 设 n 个不同数的某一个排列 P 为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，

因为 $n=4l+1, l\in\mathbf{N}^*$，所以 $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}=(4l+1)(2l+1)$ 为奇数，

而 $2S_k$ 为偶数，所以不存在 $k(k\in\mathbf{N}^*, 1\leqslant k\leqslant n)$ 使得 $2S_k=S_n$； ……………5 分

(ii) 因为 $2S_k\leqslant S_n$，即 $a_1+a_2+\cdots+a_k\leqslant a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_n$，

又由（i）知不存在 $k(k\in\mathbf{N}^*, 1\leqslant k\leqslant n)$ 使得 $2S_k=S_n$，

所以 $a_1+a_2+\cdots+a_k<a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_n$；

所以满足 $2S_k\leqslant S_n$ 的最大下标 k 即满足 $a_1+a_2+\cdots+a_k<a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_n$ ①

且 $a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}>a_{k+2}+\cdots+a_n$ ②,

考虑排列 P 的对应倒序排列 P': $a_n,a_{n-1},\cdots,a_1$，

①②即 $a_n+\cdots+a_{k+2}<a_{k+1}+a_k+\cdots+a_2+a_1$， $a_n+\cdots+a_{k+2}+a_{k+1}>a_k+\cdots+a_2+a_1$,

由题意知 $k_{P'}=n-k-1$，

则 $k_P+k_{P'}=n-1$； ……………8 分

又 $1,2,3,\cdots,n$，这 n 个不同数共有 $n!$ 个不同的排列，可以构成 $\dfrac{n!}{2}$ 个对应组合 (P,P')，

且每组 (P,P') 中 $k_P+k_{P'}=n-1$，所以 $T_n=\dfrac{n!}{2}(n-1)$. ……………10 分