如皋 2020 – 2021 学年度高三年级第一学期期末教学质量调研

数学试题

2021.02

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 设复 $z=\dfrac{i}{1+i}$（其中 i 为虚数单位），则复数 z 在复平面内对应的点

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|\lg(x-2)<1\}$，集合 $B=\{x|x^2-2x-3\geqslant 0\}$，则 $A\cup(\complement_U B)=$

A. $(2,12)$　　B. $(-1,3)$　　C. $(-1,12)$　　D. $(2,3)$

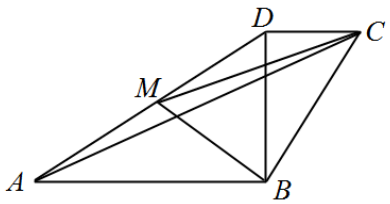
3. 已知直线 $m\subset$ 平面 α，则直线 $l\perp$ 平面 α 是直线 $l\perp m$ 的

A. 充要条件　　B. 充分不必要条件　　C. 必要不充分条件　　D. 既不充分又不必要条件

4. 已知 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$2\sin2\alpha-\cos2\alpha=1$，则 $\cos\alpha$ 的值为

A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$

5. 如图，在梯形 $ABCD$ 中，已知 $AB//CD$，$AB\perp BD$，M 为 AD 的中点，MB $\perp BC$，$AD=2BD=2$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MC}=$



A. 1　　B. $\dfrac{5}{2}$

C. 3　　D. $\dfrac{3}{2}$

6. 埃及金字塔之谜是人类史上最大的谜，它的神奇远远超过了人类的想象．在埃及金字塔内有一组神秘的数字 142857，因为 $142857\times2=285714$，$142857\times3=428571$，$142857\times4=571428$，…，所以这组数字又叫“走马灯数”．该组数字还有如下发现：$142+857=999$，$428+571=999$，$285+714=999$，…，若从这组神秘数字中任选 3 个数字构成一个三位数 x，剩下的三个数字构成另一个三位数 y，若 $x+y=999$，则所有可能的有序实数组 (x,y) 的个数为

A. 48　　B. 60　　C. 96　　D. 120

7. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 C：$(x-1)^2+y^2=4$，若直线 l：$x+y+m=0$ 上有且只有一个点 P 满足：过点 P 作圆 C 的两条切线 PM，PN，切点分别为 M，N，且使得四边形 $PMCN$ 为正方形，则正实数 m 的值为

A. 1　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 3　　D. 7

8. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，对任意两个不相等的正数 x_1，x_2，都有 $\dfrac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_2-x_1}>0$，记 $a=\dfrac{f(0.2^3)}{0.2^3}$，$b=\dfrac{f(\sin1)}{\sin1}$，$c=-\dfrac{f\left(\ln\frac{1}{3}\right)}{\ln3}$，则 a，b，c 的大小关系为

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $c<a<b$　　D. $c<b<a$

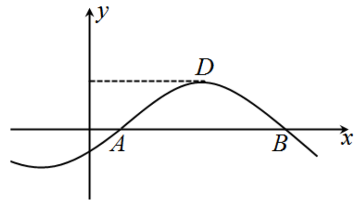
二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有项选错得 0 分．

9. 已知 $\left(2x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的二项展开式中二项式系数之和为 64，则下列结论正确的是

A. 二项展开式中各项系数之和为 3^6　　B. 二项展开式中二项式系数最大的项为 $160x^{\frac{3}{2}}$

C. 二项展开式中无常数项　　D. 二项展开式中系数最大的项为 $90x^3$

10. 如图，已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象与 x 轴交于点 A，B，若 $|OB|=7|OA|$，图象的一个最高点 $D\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$，则下列说法正确的是



A. $\varphi=-\frac{\pi}{4}$

B. $f(x)$ 的最小正周期为 4

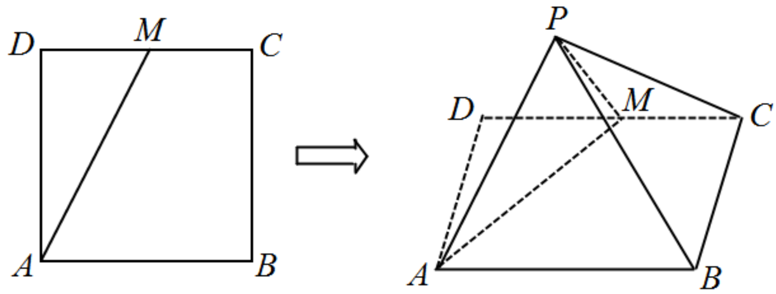
C. $f(x)$ 一个单调增区间为 $\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$

D. $f(x)$ 图象的一个对称中心为 $\left(-\frac{5}{3},0\right)$

11. 设函数 $y=f(x)$ 定义域为 D，若存在 x，$y\in D$，且 $x\neq y$，使得 $2f\left(\frac{x+y}{2}\right)=f(x)+f(y)$，则称函数 $y=f(x)$ 是 D 上的 “S 函数”，下列函数是 “S 函数” 的是

A. $y=2^x$　　B. $y=x-\sin x+1$　　C. $y=\ln x$　　D. $y=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x>0\\ 1, & x\leqslant 0\end{cases}$

12. 如图，在边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中，点 M 是边 CD 的中点，将 $\triangle ADM$ 沿 AM 翻折到 $\triangle PAM$，连结 PB，PC，在 $\triangle ADM$ 翻折到 $\triangle PAM$ 的过程中，下列说法正确的是



A. 四棱锥 $P-ABCM$ 的体积的最大值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

B. 当面 $PAM\perp$ 平面 $ABCM$ 时，二面角 $P-AB-C$ 的正切值为 $\frac{\sqrt{5}}{4}$

C. 存在某一翻折位置，使得 $AM\perp PB$

D. 棱 PB 的中点为 N，则 CN 的长为定值

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分 . 请把答案直接填写在答题卡相应位置上 .

13. 设 $f(x)=a^x+x$，若 $f(3)=6$，则不等式 $f(2x-1)>f(x)$ 的解集为____________.

14. 已知 m，n 均为正数，$\vec{a}=(1,m)$，$\vec{b}=(2,1-n)$，且 $\vec{a}/\!/\vec{b}$，则 $\frac{1}{m}+\frac{m}{n}$ 的最小值为____________.

15. 在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F，过点 F 且与 x 轴垂直的直线与双曲线的一条渐近线交于第一象限内的点 A，过点 F 且平行于 OA 的直线交另一条渐近线于点 B，若 $AB\perp OB$，则双曲线 C 的离心率为____________.

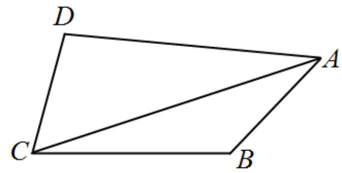
16. “双十一” 是指每年的 11 月 11 日，以一些电子商务为代表，在全国范围内兴起的大型购物促销狂欢日 . 某商家在去年的 “双十一” 中开展促销活动：凡购物满 5888 元的顾客会随机获得 A，B，C 三种赠品中的一件，现恰有 3 名顾客的购物金额满 5888 元 . 设随机变量 X 表示获得赠品完全相同的顾客人数，则 $P(X=0)=$____________，$E(X)=$____________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分 . 请在答题卡指定区域内作答 . 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤 .

17.(本小题满分10分)

从① $\triangle ABC$ 的面积 $S=2$;② $AD\perp CD$ 这两个条件中任选一个,补充在下面的问题中进行求解.如图,在平面四边形 $ABCD$ 中,$AB=CD=2$,$B=\frac{3}{4}\pi$,对角线 AC 平分 $\angle BAD$,且______________________,求线段 AD 的长.

注:如果选择两个条件分别解答,按第一个解答计分.



解:选①.

因为 $\triangle ABC$ 的面积为2,

所以 $\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot \sin B=2$,即 $\frac{1}{2}\times 2\times BC\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2$,解得 $BC=2\sqrt{2}$.

在 $\triangle ABC$ 中,根据余弦定理得 $AC^2=AB^2+CB^2-2AB\cdot CB\cdot\cos B$,

所以 $2^2+(2\sqrt{2})^2-2\times 2\times 2\sqrt{2}\times\cos\frac{3\pi}{4}=20$,故 $AC=2\sqrt{5}$,

且 $\cos\angle BAC=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{2^2+(2\sqrt{5})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\times 2\times 2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. (5分)

因为 AC 是 $\angle BAD$ 的平分线,

所以 $\cos\angle CAD=\cos\angle BAC=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

在 $\triangle ACD$ 中,根据余弦定理可得 $CD^2=AD^2+AC^2-2AD\cdot AC\cdot\cos\angle DAC$,

即 $2^2=AD^2+(2\sqrt{5})^2-2AD\times 2\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}$,解得 $AD=4$,

所以 $AD=4$. (10分)

选②.

因为 AC 平分 $\angle BAD$,设 $\angle BAC=\angle DAC=\theta$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中,$\angle D=\frac{\pi}{2}$,$\angle DAC=\theta$,$CD=2$,所以 $AC=\frac{2}{\sin\theta}$.

在 $\triangle ABC$ 中,根据正弦定理 $\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{AB}{\sin\angle ACB}$,得 $\frac{\frac{2}{\sin\theta}}{\sin\frac{3\pi}{4}}=\frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$, (5分)

整理得 $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\sin\theta$,即 $\cos\theta-\sin\theta=\sin\theta$,得 $\tan\theta=\frac{1}{2}$.

所以在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中,$\tan\theta=\frac{CD}{AD}=\frac{1}{2}$,即 $\frac{2}{AD}=\frac{1}{2}$,

所以 $AD=4$. (10分)

18.(本小题满分12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,首项 $a_1=1$,$S_{n+1}=2S_n+1$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)设 $b_n=na_n$,记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n,是否存在正整数 n,使得 $T_n=2021$? 若存在,求出 n 的值;若不存在,说明理由.

解:(1)依题意,$S_{n+1}=2S_n+1$,$a_1=1$.

当 $n=1$ 时,$S_2=2S_1+1$,故 $a_2=a_1+1=2$,所以 $a_2=2a_1$;

当 $n\geqslant 2$,$n\in\mathbf{N}^*$ 时,$S_n=2S_{n-1}+1$,

所以当 $n\geqslant 2, n\in \mathbf{N}^*$ 时，$a_{n+1}=2a_n$，
所以 $a_{n+1}=2a_n$ 对 $\forall n\in \mathbf{N}^*$ 都成立.

因为 $a_1=1\neq 0$，所以 $a_n\neq 0$，所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$ 为定值，

所以数列 $\{a_n\}$ 是 $a_1=1$，公比为 2 的等比数列，
所以 $a_n=2^{n-1}$. （5 分）

(2) 依题意，$b_n=na_n=n\cdot 2^{n-1}$，
$T_n=1\times 2^0+2\times 2^1+3\times 2^2+\cdots+n\times 2^{n-1}$，
$2T_n=1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+(n-1)\times 2^{n-1}+n\times 2^n$，

所以 $-T_n=1\times 2^0+1\times 2^1+1\times 2^2+\cdots+1\times 2^{n-1}-n\times 2^n=\frac{1-2^n}{1-2}-n\times 2^n$，

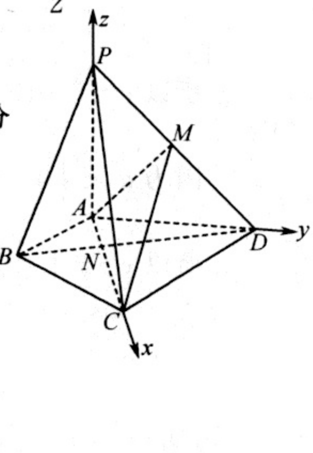
整理得 $T_n=(n-1)\cdot 2^n+1$. （9 分）

因为 $b_n=n\cdot 2^{n-1}>0$，故数列 $\{T_n\}$ 是单调递增数列.
又 $T_8=7\times 2^8+1=1\ 793<2\ 021$，$T_9=8\times 2^9+1=4\ 097>2\ 021$，
故不存在正整数 n，使得 $T_n=2\ 021$. （12 分）

19.（本小题满分 12 分）
如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，AC，BD 相交于点 N，$DN=2NB$，已知 $PA=AC=AD=3$，$BD=3\sqrt{3}$，$\angle ADB=30^\circ$.
(1) 求证：$AC\perp$ 平面 PAD；
(2) 设棱 PD 的中点为 M，求平面 PAB 与平面 MAC 所成二面角的正弦值

在 $\triangle AND$ 中，$AD=3$，$\angle ADN=30^\circ$，$DN=2\sqrt{3}$，根据余弦定理可得

$AN^2=AD^2+ND^2-2AD\cdot ND\cdot\cos\angle ADN=3^2+(2\sqrt{3})^2-2\times 3\times 2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$，



故 $AN=\sqrt{3}$，所以 $NA^2+AD^2=ND^2$，$\angle NAD=90^\circ$，所以 $AC\perp AD$.
又 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AC\perp PA$.
因为 $PA\cap AD=A$，PA，$AD\subset$ 平面 PAD，所以 $AC\perp$ 平面 PAD. （6 分
(2) **解**：以 A 为坐标原点，以 AC，AD，AP 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$.
在 $\triangle BAD$ 中，$AD=3$，$BD=3\sqrt{3}$，$\angle ADB=30^\circ$，根据余弦定理可得
$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cdot\cos\angle ADB=3^2+(3\sqrt{3})^2-2\times 3\times 3\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=9$，故 $AB=3$，所以 $\angle ABD=30^\circ$，$\angle BAD=120^\circ$.

所以 $\begin{cases}\frac{3\sqrt{3}}{2}x-\frac{3}{2}y=0,\\ 3z=0,\end{cases}$ 取 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}_1=(1,\sqrt{3},0)$，所以平面 PAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(1,\sqrt{3},0)$

同理，平面 MAC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,1,-1)$. 所以 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{\sqrt{3}}{2\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

设平面 PAB 与平面 MAC 所成的二面角为 θ，故 $|\cos\theta|=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

因为 $\theta\in[0,\pi]$，所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{4}$，

所以平面 PAB 与平面 MAC 所成二面角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{4}$. （12 分）

20.(本小题满分12分)

习近平总书记在党的十九大工作报告中提出,永远把人民美好生活的向往作为奋斗目标.在这一号召下,全国人民积极工作,健康生活.当前,“日行万步”正式成为健康生活的代名词.某地一研究团队统计了该地区1000位居民的日行步数,得到如下表格:

日行步数(单位:千步)	[0,2]	(2,4]	(4,6]	(6,8]	(8,10]	(10,12]	(12,14]
人数	20	60	170	200	300	200	50

(1)为研究日行步数与居民年龄的关系,以日行步数是否超过8千步为标准进行分层抽样,从上述1000位居民中抽取200人,得到如下列联表,请将列联表补充完整,并根据列联表判断是否有95%的把握认为日行步数与居民年龄超过40岁有关;

	日行步数$\leqslant$8千步	日行步数$>$8千步	总计
40岁以上			100
40岁以下(含40岁)	50		
总计			200

(2)以这1000位居民日行步数超过8千步的频率,代替该地区1位居民日行步数超过8千的概率,每位居民日行步数是否超过8千相互独立.为了深入研究,该研究团队随机调查了20位居民,其中日行步数超过8千的最有可能(即概率最大)是多少位居民?

附:$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,其中$n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.05	0.025	0.010
k_0	3.841	5.024	6.635

解:(1)表格如下:

	日行步数$\leqslant$8千步	日行步数$>$8千步	总计
40岁以上	40	60	100
40岁以下(含40岁)	50	50	100
总计	90	110	200

则$K^2=\dfrac{200\times(40\times50-50\times60)^2}{90\times110\times100\times100}=\dfrac{200}{99}\approx2.020$.

因为$2.020<3.841$,所以没有95%的把握认为日行步数与居民年龄是否超过40岁有关.(5分)

(2)依题意,该地区1位居民日行步数超过8千步的概率为$\dfrac{550}{1000}=\dfrac{11}{20}$.

设调查的20位居民中日行步数超过8千步的人数为X,

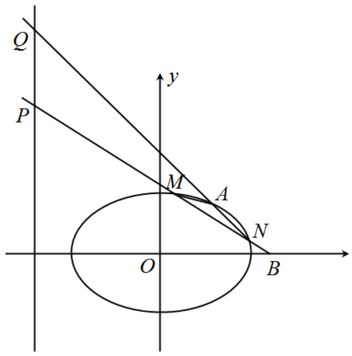
则$X\sim B\left(20,\dfrac{11}{20}\right)$,$P(X=k)=C_{20}^{k}\left(\dfrac{11}{20}\right)^{k}\left(\dfrac{9}{20}\right)^{20-k}$,$k=0,1,2,\cdots,20$.

令$\begin{cases}P(X=k)\geqslant P(X=k+1),\\P(X=k)\geqslant P(X=k-1),\end{cases}$即$\begin{cases}C_{20}^{k}\left(\dfrac{11}{20}\right)^{k}\left(\dfrac{9}{20}\right)^{20-k}\geqslant C_{20}^{k+1}\left(\dfrac{11}{20}\right)^{k+1}\left(\dfrac{9}{20}\right)^{19-k},\\C_{20}^{k}\left(\dfrac{11}{20}\right)^{k}\left(\dfrac{9}{20}\right)^{20-k}\geqslant C_{20}^{k-1}\left(\dfrac{11}{20}\right)^{k-1}\left(\dfrac{9}{20}\right)^{21-k},\end{cases}$

化简得$\begin{cases}\dfrac{9}{20-k}\geqslant\dfrac{11}{k+1},\\\dfrac{11}{k}\geqslant\dfrac{9}{21-k},\end{cases}$解得$\dfrac{211}{20}\leqslant k\leqslant\dfrac{231}{20}$.又$k\in\mathbf{N}$,故$k=11$.

所以这20位居民中的日行步数超过8千步的最有可能的是11位居民.(12分)

21.(本小题满分 12 分)



已知椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $A(2,1)$,椭圆 C 在点 A 处的切线方程为 $y=-x+3$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设过点 $B(3,0)$ 且与 x 轴不重合的直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 M,N,直线 AM,AN 分别与直线 $x=-3$ 分别交于 P,Q,记点 P,Q 的纵坐标分别为 p,q,求 $p+q$ 的值.

解:(1) 因为椭圆 C 经过点 $A(2,1)$,所以 $\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$,即 $a^2b^2=a^2+4b^2$ ①.

又直线 $y=-x+3$ 与椭圆 C 相切,

联立方程组 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ y=-x+3,\end{cases}$ 整理得 $(a^2+b^2)x^2-6a^2x+9a^2-a^2b^2=0$,

据 $\Delta=0$,得 $36a^4-4(a^2+b^2)(9a^2-a^2b^2)=0$,即 $a^2+b^2=9$ ②.

联立①②,解得 $a^2=6$,$b^2=3$,

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$. (5 分)

(2) 依题意,直线 l 经过点 $B(3,0)$,且不与 x 轴重合,设 l 的方程为 $x=ty+3$,$M(ty_1+3,y_1)$,$N(ty_2+3,y_2)$.

联立方程组 $\begin{cases}x=ty+3,\\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 整理得 $(t^2+2)y^2+6ty+3=0$,

故 $\begin{cases}\Delta>0,\\ y_1+y_2=-\frac{6t}{t^2+2},\\ y_1y_2=\frac{3}{t^2+2},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y_1+y_2=-\frac{6t}{t^2+2},\\ y_1y_2=\frac{3}{t^2+2},\end{cases}$ 其中 $t<-1$ 或 $t>1$.

又直线 AM:$y-1=\frac{1-y_1}{-ty_1-1}(x-2)$,令 $x=-3$,得 $p=\frac{(t-5)y_1+6}{ty_1+1}$.

同理,$q=\frac{(t-5)y_2+6}{ty_2+1}$.

故 $p+q=\frac{(t-5)y_1+6}{ty_1+1}+\frac{(t-5)y_2+6}{ty_2+1}=\frac{2t(t-5)y_1y_2+(7t-5)(y_1+y_2)+12}{t^2y_1y_2+t(y_1+y_2)+1}$

$$=\frac{2t(t-5)\times\frac{3}{t^2+2}+(7t-5)\frac{-6t}{t^2+2}+12}{t^2\times\frac{3}{t^2+2}+t\times\frac{-6t}{t^2+2}+1}=\frac{\frac{-24t^2+24}{t^2+2}}{\frac{-2t^2+2}{t^2+2}}=12.$$ (12 分)

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=e^x-x-1$, $x>0$.

(1) 若关于 x 的不等式 $xf(x)>ke^x-x^2-2x-2$ 对任意的 $x>0$ 恒成立,求实数 k 的取值范围;

(2) 设 $g(x)=\dfrac{2f(x)}{x^2}$, $x>0$.

①求证: $g(x)>1$;

②若数列 $\{a_n\}$ 满足 $0<a_1<\ln\dfrac{3}{2}$, $a_{n+1}=\ln g(a_n)$,求证: $e^{a_n}-1<\dfrac{1}{2^n}$.

(1) **解**:依题意,$x(e^x-x-1)>ke^x-x^2-2x-2$ 对 $\forall x>0$ 恒成立,即 $k>x+\dfrac{x+2}{e^x}$ 对 $\forall x>0$ 恒成立.

令 $h(x)=x+\dfrac{x+2}{e^x}$, $x>0$, $h'(x)=\dfrac{e^x-x-1}{e^x}=\dfrac{f(x)}{e^x}$,

而 $f'(x)=e^x-1>0$,故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调增函数,

故 $f(x)>f(0)=0$,从而 $h'(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}>0$,所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调增函数,

所以,当 $x>0$ 时,$h(x)>h(0)=2$. 所以 $k\leqslant 2$. (3 分)

(2) **证明**:依题意,$g(x)=\dfrac{2f(x)}{x^2}=\dfrac{2(e^x-x-1)}{x^2}$, $x>0$.

① 要证 $g(x)>1$,即证 $\dfrac{2(e^x-x-1)}{x^2}>1$,只需证 $e^x-x-1>\dfrac{1}{2}x^2$,

即证 $e^x-\dfrac{1}{2}x^2-x-1>0$. 令 $t(x)=e^x-\dfrac{1}{2}x^2-x-1$, $x>0$, $t'(x)=e^x-x-1=f(x)>0$,

所以 $t(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调增函数,故 $t(x)>t(0)=0$,

即 $e^x-\dfrac{1}{2}x^2-x-1>0$,所以当 $x>0$ 时,$g(x)>1$. (6 分)

② 由①可知,当 $x>0$ 时,$g(x)>1$,因为 $a_1\in\left(0,\ln\dfrac{3}{2}\right)$,故 $g(a_1)>1$,

所以 $a_2=\ln g(a_1)>0$, $g(a_2)>1$, $a_3=\ln g(a_2)>0$, $\cdots$, $a_n>0$.

要证 $e^{a_n}-1<\dfrac{1}{2^n}$,只需证 $e^{a_{n+1}}-1<\dfrac{1}{2}(e^{a_n}-1)$,

即证 $g(a_n)-1<\dfrac{1}{2}(e^{a_n}-1)$,即证 $g(a_n)-\dfrac{1}{2}e^{a_n}-\dfrac{1}{2}<0$.

令 $x=a_n>0$,只需证 $g(x)-\dfrac{1}{2}e^x-\dfrac{1}{2}<0$, 即证 $\dfrac{2(e^x-x-1)}{x^2}-\dfrac{1}{2}e^x-\dfrac{1}{2}<0$,

即证 $\left(\dfrac{1}{2}x^2-2\right)e^x+\dfrac{1}{2}x^2+2x+2>0$, 即证 $\dfrac{1}{2}(x+2)[(x-2)e^x+x+2]>0$.

因为 $x=a_n>0$,故 $x+2>0$.

据(1)可得,当 $k=2$ 时,$x+\dfrac{x+2}{e^x}>2$ 对 $\forall x>0$ 恒成立,

即当 $x>0$ 时,$(x-2)e^x+x+2>0$,

所以 $\dfrac{1}{2}(x+2)[(x-2)e^x+x+2]>0$ 对 $\forall x>0$ 恒成立. 所以 $e^{a_{n+1}}-1<\dfrac{1}{2}(e^{a_n}-1)$.

因为 $a_1\in\left(0,\ln\dfrac{3}{2}\right)$,故 $e^{a_1}-1<\dfrac{1}{2}$,

所以 $e^{a_n}-1<\dfrac{1}{2}(e^{a_{n-2}}-1)<\dfrac{1}{2^2}(e^{a_{n-3}}-1)<\cdots<\dfrac{1}{2^{n-1}}(e^{a_1}-1)<\dfrac{1}{2^n}$. (12 分)

2020～2021学年高三年级模拟考试卷(四)(如皋)

数学参考答案及评分标准

1. A　2. C　3. B　4. D　5. B　6. A　7. C　8. D　9. AB　10. BCD　11. BD　12. ABD

13. $(1,+\infty)$　14. 4　15. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　16. $\frac{2}{9}$　$\frac{5}{3}$

17. **解**:选①.

因为$\triangle ABC$的面积为2,

所以$\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin B=2$,即$\frac{1}{2}\times2\times BC\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2$,解得$BC=2\sqrt{2}$.

在$\triangle ABC$中,根据余弦定理得$AC^2=AB^2+CB^2-2AB\cdot CB\cdot\cos B$,

所以$2^2+(2\sqrt{2})^2-2\times2\times2\sqrt{2}\times\cos\frac{3\pi}{4}=20$,故$AC=2\sqrt{5}$,

且$\cos\angle BAC=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{2^2+(2\sqrt{5})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\times2\times2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.　(5分)

因为AC是$\angle BAD$的平分线,

所以$\cos\angle CAD=\cos\angle BAC=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

在$\triangle ACD$中,根据余弦定理可得$CD^2=AD^2+AC^2-2AD\cdot AC\cdot\cos\angle DAC$,

即$2^2=AD^2+(2\sqrt{5})^2-2AD\times2\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}$,解得$AD=4$,

所以$AD=4$.　(10分)

选②.

因为AC平分$\angle BAD$,设$\angle BAC=\angle DAC=\theta$,

在$\text{Rt}\triangle ADC$中,$\angle D=\frac{\pi}{2}$,$\angle DAC=\theta$,$CD=2$,所以$AC=\frac{2}{\sin\theta}$.

在$\triangle ABC$中,根据正弦定理$\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{AB}{\sin\angle ACB}$,得$\frac{\frac{2}{\sin\theta}}{\sin\frac{3\pi}{4}}=\frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$,　(5分)

整理得$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\sin\theta$,即$\cos\theta-\sin\theta=\sin\theta$,得$\tan\theta=\frac{1}{2}$.

所以在$\text{Rt}\triangle ADC$中,$\tan\theta=\frac{CD}{AD}=\frac{1}{2}$,即$\frac{2}{AD}=\frac{1}{2}$,

所以$AD=4$.　(10分)

18. **解**:(1) 依题意,$S_{n+1}=2S_n+1$,$a_1=1$.

当$n=1$时,$S_2=2S_1+1$,故$a_2=a_1+1=2$,所以$a_2=2a_1$;

当$n\geqslant2$,$n\in\mathbf{N}^*$时,$S_n=2S_{n-1}+1$,

所以当 $n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*$ 时，$a_{n+1}=2a_n$，
所以 $a_{n+1}=2a_n$ 对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

因为 $a_1=1\neq 0$，所以 $a_n\neq 0$，所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$ 为定值，

所以数列 $\{a_n\}$ 是 $a_1=1$，公比为 2 的等比数列，
所以 $a_n=2^{n-1}$. （5 分）

(2) 依题意，$b_n=na_n=n\cdot 2^{n-1}$，

$T_n=1\times 2^0+2\times 2^1+3\times 2^2+\cdots+n\times 2^{n-1}$，

$2T_n=1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+(n-1)\times 2^{n-1}+n\times 2^n$，

所以 $-T_n=1\times 2^0+1\times 2^1+1\times 2^2+\cdots+1\times 2^{n-1}-n\times 2^n=\frac{1-2^n}{1-2}-n\times 2^n$，

整理得 $T_n=(n-1)\cdot 2^n+1$. （9 分）

因为 $b_n=n\cdot 2^{n-1}>0$，故数列 $\{T_n\}$ 是单调递增数列.

又 $T_8=7\times 2^8+1=1\ 793<2\ 021$，$T_9=8\times 2^9+1=4\ 097>2\ 021$，

故不存在正整数 n，使得 $T_n=2\ 021$. （12 分）

19. (1) **证明**：因为 $BD=3\sqrt{3}$，$DN=2NB$，故 $DN=\frac{2}{3}BD=2\sqrt{3}$.

在 $\triangle AND$ 中，$AD=3$，$\angle ADN=30^\circ$，$DN=2\sqrt{3}$，根据余弦定理可得

$AN^2=AD^2+ND^2-2AD\cdot ND\cdot\cos\angle ADN=3^2+(2\sqrt{3})^2-2\times 3\times 2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$，

故 $AN=\sqrt{3}$，所以 $NA^2+AD^2=ND^2$，$\angle NAD=90^\circ$，

所以 $AC\perp AD$.

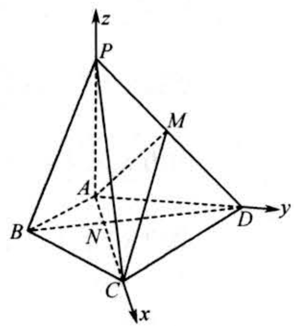
又 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $AC\perp PA$.

因为 $PA\cap AD=A$，$PA,AD\subset$ 平面 PAD，

所以 $AC\perp$ 平面 PAD. （6 分）

(2) **解**：以 A 为坐标原点，以 AC,AD,AP 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$.



在 $\triangle BAD$ 中，$AD=3$，$BD=3\sqrt{3}$，$\angle ADB=30^\circ$，根据余弦定理可得

$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cdot\cos\angle ADB=3^2+(3\sqrt{3})^2-2\times 3\times 3\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=9$，

故 $AB=3$，所以 $\angle ABD=30^\circ$，$\angle BAD=120^\circ$.

所以 $A(0,0,0)$，$B\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},0\right)$，$C(3,0,0)$，$D(0,3,0)$，$P(0,0,3)$.

因为点 M 是 PD 的中点，故 $M\left(0,\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$.

设 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$ 是平面 PAB 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{AB},\\ \boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{AP},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AP}=0,\end{cases}$

所以$\begin{cases}\dfrac{3\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{3}{2}y=0,\\ 3z=0,\end{cases}$取 $x=1$,得 $\boldsymbol{n}_1=(1,\sqrt{3},0)$,

所以平面 PAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(1,\sqrt{3},0)$.

同理,平面 MAC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,1,-1)$.

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

设平面 PAB 与平面 MAC 所成的二面角为 θ,故 $|\cos\theta|=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

因为 $\theta\in[0,\pi]$,所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$,

所以平面 PAB 与平面 MAC 所成二面角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{10}}{4}$. (12 分)

20. **解**:(1) 表格如下:

	日行步数≤8 千步	日行步数>8 千步	总计
40 岁以上	40	60	100
40 岁以下(含 40 岁)	50	50	100
总计	90	110	200

则 $K^2=\dfrac{200\times(40\times50-50\times60)^2}{90\times110\times100\times100}=\dfrac{200}{99}\approx2.020$.

因为 $2.020<3.841$,

所以没有 95%的把握认为日行步数与居民年龄是否超过 40 岁有关. (5 分)

(2) 依题意,该地区 1 位居民日行步数超过 8 千步的概率为$\dfrac{550}{1000}=\dfrac{11}{20}$.

设调查的 20 位居民中日行步数超过 8 千步的人数为 X,

则 $X\sim B\left(20,\dfrac{11}{20}\right)$,$P(X=k)=C_{20}^{k}\left(\dfrac{11}{20}\right)^{k}\left(\dfrac{9}{20}\right)^{20-k}$,$k=0,1,2,\cdots,20$.

令$\begin{cases}P(X=k)\geqslant P(X=k+1),\\ P(X=k)\geqslant P(X=k-1),\end{cases}$ 即$\begin{cases}C_{20}^{k}\left(\dfrac{11}{20}\right)^{k}\left(\dfrac{9}{20}\right)^{20-k}\geqslant C_{20}^{k+1}\left(\dfrac{11}{20}\right)^{k+1}\left(\dfrac{9}{20}\right)^{19-k},\\ C_{20}^{k}\left(\dfrac{11}{20}\right)^{k}\left(\dfrac{9}{20}\right)^{20-k}\geqslant C_{20}^{k-1}\left(\dfrac{11}{20}\right)^{k-1}\left(\dfrac{9}{20}\right)^{21-k},\end{cases}$

化简得$\begin{cases}\dfrac{9}{20-k}\geqslant\dfrac{11}{k+1},\\ \dfrac{11}{k}\geqslant\dfrac{9}{21-k},\end{cases}$ 解得$\dfrac{211}{20}\leqslant k\leqslant\dfrac{231}{20}$.

又 $k\in\mathbf{N}$,故 $k=11$.

所以这 20 位居民中的日行步数超过 8 千步的最有可能的是 11 位居民. (12 分)

21. **解**:(1) 因为椭圆 C 经过点 $A(2,1)$,所以$\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$,即 $a^2b^2=a^2+4b^2$ ①.

又直线 $y=-x+3$ 与椭圆 C 相切，

联立方程组 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ y=-x+3,\end{cases}$ 整理得 $(a^2+b^2)x^2-6a^2x+9a^2-a^2b^2=0$，

据 $\Delta=0$，得 $36a^4-4(a^2+b^2)(9a^2-a^2b^2)=0$，即 $a^2+b^2=9$ ②.

联立①②，解得 $a^2=6, b^2=3$，

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$. （5 分）

(2) 依题意，直线 l 经过点 $B(3,0)$，且不与 x 轴重合，设 l 的方程为 $x=ty+3$，$M(ty_1+3,y_1)$，$N(ty_2+3,y_2)$.

联立方程组 $\begin{cases}x=ty+3,\\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 整理得 $(t^2+2)y^2+6ty+3=0$，

故 $\begin{cases}\Delta>0,\\ y_1+y_2=-\dfrac{6t}{t^2+2},\\ y_1y_2=\dfrac{3}{t^2+2},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y_1+y_2=-\dfrac{6t}{t^2+2},\\ y_1y_2=\dfrac{3}{t^2+2},\end{cases}$ 其中 $t<-1$ 或 $t>1$.

又直线 AM：$y-1=\dfrac{1-y_1}{-ty_1-1}(x-2)$，令 $x=-3$，得 $p=\dfrac{(t-5)y_1+6}{ty_1+1}$.

同理，$q=\dfrac{(t-5)y_2+6}{ty_2+1}$.

故 $p+q=\dfrac{(t-5)y_1+6}{ty_1+1}+\dfrac{(t-5)y_2+6}{ty_2+1}=\dfrac{2t(t-5)y_1y_2+(7t-5)(y_1+y_2)+12}{t^2y_1y_2+t(y_1+y_2)+1}$

$=\dfrac{2t(t-5)\times\dfrac{3}{t^2+2}+(7t-5)\dfrac{-6t}{t^2+2}+12}{t^2\times\dfrac{3}{t^2+2}+t\times\dfrac{-6t}{t^2+2}+1}=\dfrac{\dfrac{-24t^2+24}{t^2+2}}{\dfrac{-2t^2+2}{t^2+2}}=12.$ （12 分）

22. (1) **解**：依题意，$x(e^x-x-1)>ke^x-x^2-2x-2$ 对 $\forall x>0$ 恒成立，

即 $k>x+\dfrac{x+2}{e^x}$ 对 $\forall x>0$ 恒成立.

令 $h(x)=x+\dfrac{x+2}{e^x}$，$x>0$，$h'(x)=\dfrac{e^x-x-1}{e^x}=\dfrac{f(x)}{e^x}$，

而 $f'(x)=e^x-1>0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调增函数，

故 $f(x)>f(0)=0$，从而 $h'(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调增函数，

所以，当 $x>0$ 时，$h(x)>h(0)=2$.

所以 $k\leqslant 2$. （3 分）

(2) **证明**：依题意，$g(x)=\dfrac{2f(x)}{x^2}=\dfrac{2(e^x-x-1)}{x^2}$，$x>0$.

① 要证 $g(x)>1$，即证 $\dfrac{2(e^x-x-1)}{x^2}>1$，只需证 $e^x-x-1>\dfrac{1}{2}x^2$，

即证 $e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1>0$.

令 $t(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1, x>0, t'(x)=e^x-x-1=f(x)>0$,

所以 $t(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调增函数,故 $t(x)>t(0)=0$,

即 $e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1>0$,

所以当 $x>0$ 时,$g(x)>1$. (6 分)

② 由①可知,当 $x>0$ 时, $g(x)>1$,因为 $a_1\in\left(0,\ln\frac{3}{2}\right)$,故 $g(a_1)>1$,

所以 $a_2=\ln g(a_1)>0, g(a_2)>1, a_3=\ln g(a_2)>0,\cdots,a_n>0$.

要证 $e^{a_n}-1<\frac{1}{2^n}$,只需证 $e^{a_{n+1}}-1<\frac{1}{2}(e^{a_n}-1)$,

即证 $g(a_n)-1<\frac{1}{2}(e^{a_n}-1)$,即证 $g(a_n)-\frac{1}{2}e^{a_n}-\frac{1}{2}<0$.

令 $x=a_n>0$,只需证 $g(x)-\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}<0$,

即证 $\frac{2(e^x-x-1)}{x^2}-\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}<0$,

即证 $\left(\frac{1}{2}x^2-2\right)e^x+\frac{1}{2}x^2+2x+2>0$,

即证 $\frac{1}{2}(x+2)[(x-2)e^x+x+2]>0$.

因为 $x=a_n>0$,故 $x+2>0$.

据(1)可得,当 $k=2$ 时,$x+\frac{x+2}{e^x}>2$ 对 $\forall x>0$ 恒成立,

即当 $x>0$ 时,$(x-2)e^x+x+2>0$,

所以 $\frac{1}{2}(x+2)[(x-2)e^x+x+2]>0$ 对 $\forall x>0$ 恒成立.

所以 $e^{a_{n+1}}-1<\frac{1}{2}(e^{a_n}-1)$.

因为 $a_1\in\left(0,\ln\frac{3}{2}\right)$,故 $e^{a_1}-1<\frac{1}{2}$,

所以 $e^{a_n}-1<\frac{1}{2}(e^{a_{n-2}}-1)<\frac{1}{2^2}(e^{a_{n-3}}-1)<\cdots<\frac{1}{2^{n-1}}(e^{a_1}-1)<\frac{1}{2^n}$. (12 分)