# 模块综合试卷(二)

(时间：120 分钟　满分：150 分)

**一、选择题**(本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分)

1.甲、乙两工人在同样的条件下生产产品，日产量相等，每天出废品的情况如下表：

| 工人 | 甲 | | | | 乙 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 废品数($\xi$) | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 概率($P$) | 0.4 | 0.3 | 0.2 | 0.1 | 0.3 | 0.5 | 0.2 | 0 |

则下列结论中正确的是(　　)

A.甲生产的产品质量比乙生产的产品质量好一些

B.乙生产的产品质量比甲生产的产品质量好一些

C.两人生产的产品质量一样好

D.无法判断谁生产的产品质量好一些

**答案**　B

**解析**　$E(\xi_{甲})=0\times0.4+1\times0.3+2\times0.2+3\times0.1=1$，$E(\xi_{乙})=0\times0.3+1\times0.5+2\times0.2+3\times0=0.9$，

$\because E(\xi_{甲})>E(\xi_{乙})$，$\therefore$甲每天出废品的数量比乙要多，

$\therefore$乙生产的产品质量比甲生产的产品质量好一些.

2.设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 $P(X\leqslant a)=P(X>a)$，则 $a$ 等于(　　)

A.0　B.$-\mu$　C.$\mu$　D.$\sigma$

**答案**　C

3.由数字 0,1,4,5,7 组成的没有重复数字的三位奇数的个数为(　　)

A.27　B.24　C.60　D.72

**答案**　A

**解析**　第一步排个位有 $C_3^1$种排法；第二步排首位有 $C_3^1$种排法；第三步排中间位置有 $C_3^1$种排法，共有排法 $C_3^1C_3^1C_3^1=27$(种)，所以有不同的三位奇数 27 个.

4.同时抛掷两枚质地均匀的硬币 10 次，设两枚硬币同时出现反面朝上的次数为 $\xi$，则 $V(\xi)$等于(　　)

A.$\frac{5}{2}$　B.$\frac{15}{4}$　C.$\frac{15}{8}$　D.5

**答案**　C

**解析**　$\xi\sim B\left(10,\frac{1}{4}\right)$，$\therefore V(\xi)=10\times\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{15}{8}$.

5.根据某班学生数学、外语成绩得到的 2×2 列联表如下：

| | 数优 | 数差 | 合计 |
|---|---|---|---|
| 外优 | 34 | 17 | 51 |
| 外差 | 15 | 19 | 34 |
| 合计 | 49 | 36 | 85 |

那么 $\chi^2$ 统计量约为(　　)

A.10.3　B.8　C.4.25　D.9.3

**答案**　C

**解析**　由公式得

$$\chi^2=\frac{85\times(34\times19-17\times15)^2}{51\times34\times49\times36}\approx4.25.$$

6.$(4^x-2^{-x})^6(x\in\mathbf{R})$的展开式中的常数项是(　　)

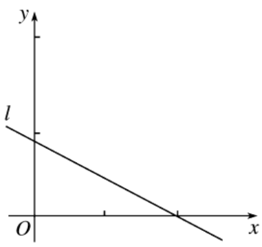
A.－20　B.－15　C.15　D.20

**答案**　C

**解析**　设展开式的常数项是第 $r+1$ 项，则 $T_{r+1}=C_6^r(4^x)^{6-r}(-2^{-x})^r(r=0,1,2,\cdots,6)$，即 $T_{r+1}=C_6^r(-1)^r2^{2x(6-r)}2^{-rx}=C_6^r(-1)^r2^{12x-3rx}$，

$\therefore 12x-3rx=0$ 恒成立，$\therefore r=4$，$\therefore T_5=C_6^4(-1)^4=15.$

7.设$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，…，$(x_n，y_n)$是变量 $x$ 和 $y$ 的 $n$ 个样本点，直线 $l$ 是由这些样本点通过最小二乘法得到的回归直线(如图所示)，以下结论中正确的是(　　)




A.$x$ 和 $y$ 的相关系数为直线 $l$ 的斜率

B.$x$ 和 $y$ 的相关系数在 0 到 1 之间

C.当 $n$ 为偶数时，分布在 $l$ 两侧的样本点的个数一定相同

D.直线 $l$ 过点$(\overline{x}，\overline{y})$

**答案**　D

**解析**　因为相关系数是表示两个变量是否具有线性相关关系的一个值，它的绝对值越接近 1，两个变量的线性相关程度越强，所以 A，B 错误.C 中 $n$ 为偶数时，分布在 $l$ 两侧的样本点的个数可以不相同，所以 C 错误.根据线性回归方程一定经过样本点的中心可知 D 正确.

8.流星穿过大气层落在地面上的概率为 0.002，则由 10 个流星组成的流星群穿过大气层恰有 4 个落在地面上的概率为(　　)

A.$3.32\times10^{-5}$　　B.$3.32\times10^{-9}$

C.$6.64\times10^{-5}$　　D.$6.64\times10^{-8}$

**答案**　B

**解析**　$C_{10}^{4}(0.002)^{4}(1-0.002)^{6}\approx3.32\times10^{-9}$.

9.安排 3 名志愿者完成 4 项工作，每人至少完成 1 项，每项工作由 1 人完成，则不同的安排方式共有(　　)

A.36 种　B.18 种　C.24 种　D.12 种

**答案**　A

**解析**　因为安排 3 名志愿者完成 4 项工作，每人至少完成 1 项，每项工作由 1 人完成，所以必有 1 人完成 2 项工作.先把 4 项工作分成 3 组，即 2,1,1，有$\dfrac{C_4^2C_2^1C_1^1}{A_2^2}=6$(种)，再分配给 3 个人，有 $A_3^3=6$(种)，所以不同的安排方式共有 $6\times6=36$(种).

10.某城市新修建的一条道路上有 12 盏路灯，为了节省用电而又不能影响正常的照明，可以熄灭其中的 3 盏灯，但两端的灯不能熄灭，也不能熄灭相邻的两盏灯，则熄灯的方法有(　　)

A.$C_{11}^3$种　B.$A_8^3$种　C.$C_9^3$种　D.$C_8^3$种

**答案**　D

**解析**　分析题意可知，最终剩余的亮着的灯共有 9 盏，且两端的必须亮着，所以可用插空的方法，共有 8 个空可选，所以应为 $C_8^3$(种).

11.某班举行了一次“心有灵犀”活动，教师把一张写有成语的纸条出示给 $A$ 组的某个同学，这个同学再用身体语言把成语的意思传递给本组其他同学.若小组内同学甲猜对成语的概率是 0.4，同学乙猜对成语的概率是 0.5，且规定猜对得 1 分，猜不对得 0 分，则这两个同学各猜 1 次，得分之和 $X$(单位：分)的均值为(　　)

A.0.9　B.0.8　C.1.2　D.1.1

**答案**　A

**解析**　$X$ 的可能取值为 0,1,2，

$P(X=0)=(1-0.4)(1-0.5)=0.3$，$P(X=1)=0.4\times(1-0.5)+(1-0.4)\times0.5=0.5$，$P(X=2)=0.4\times0.5=0.2$，$\therefore E(X)=0\times0.3+1\times0.5+2\times0.2=0.9$.

12.如果 $X\sim B\left(20,\dfrac{1}{3}\right)$，$Y\sim B\left(20,\dfrac{2}{3}\right)$，那么当 $X$，$Y$ 变化时，下面关于 $P(X=x_k)=P(Y=y_k)$成立的$(x_k,y_k)$的个数为(　　)

A.10　B.20　C.21　D.0

**答案**　C

**解析**　根据二项分布的特点可知，满足题意的$(x_k,y_k)$分别为(0,20)，(1,19)，(2,18)，…，(20,0)，

共 21 个，故选 C.

**二、填空题**(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分)

13.在$\left(x-\frac{1}{4x}\right)^6$的展开式中，$x^2$的系数为________.

**答案** $\frac{15}{16}$

**解析** $\left(x-\frac{1}{4x}\right)^6$的展开式的第 $r+1$ 项为 $T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}\left(-\frac{1}{4}\right)^r x^{-r}=C_6^r\left(-\frac{1}{4}\right)^r x^{6-2r}$，令 $6-2r=2$，解得 $r=2$，故 $x^2$ 的系数为 $C_6^2\times\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{15}{16}$.

14.某部门通过随机调查 89 名工作人员的休闲方式是读书还是健身，得到的数据如下表：

| | 读书 | 健身 | 合计 |
|---|---|---|---|
| 女 | 24 | 31 | 55 |
| 男 | 8 | 26 | 34 |
| 合计 | 32 | 57 | 89 |

在犯错误的概率不超过________的前提下认为性别与休闲方式有关系.

**考点** 独立性检验及其基本思想

**题点** 独立性检验的方法

**答案** 0.10

**解析** 由列联表中的数据，得

$\chi^2=\frac{89\times(24\times26-31\times8)^2}{55\times34\times32\times57}\approx3.689>2.706$，

因此，在犯错误的概率不超过 0.10 的前提下认为性别与休闲方式有关系.

15.俗语中常说，三个臭皮匠胜过诸葛亮，若三个臭皮匠能解决某问题的概率分别为 60%,50%,45%.诸葛亮解决问题的概率为 85%.若三个臭皮匠中有一人能解决问题即为解决，则三个臭皮匠解决此问题的概率为________.

**答案** 89%

**解析** 记事件 $A$ 为“三个臭皮匠不能解决问题”，$P(A)=(1-60\%)(1-50\%)(1-45\%)=0.11$.∴三个臭皮匠能解决此问题的概率为 $1-P(A)=1-0.11=0.89=89\%$.

16.反复抛掷一个质地均匀的正方体骰子，依次记录每一次落地时骰子向上的点数，当记有三个不同点数时即停止抛掷.若抛掷四次恰好停止，则这四次点数所有不同的结果种数为________.(用数字作答)

**答案** 360

**解析** 假设第四次抛出的数字为 1，则前三次抛出的数字应该是 2,3,4,5,6 中的两个，选出两

个，放在前三个空中，有$\frac{C_5^2C_2^1A_3^3}{A_2^2}$种排法.根据分步计数原理知，共有 $C_6^1\cdot\frac{C_5^2C_2^1A_3^3}{A_2^2}=360$(种)不同的结果.

**三、解答题**(本大题共 6 小题，共 70 分)

17.(10 分)五位师傅和五名徒弟站成一排.

(1)五名徒弟必须排在一起共有多少种排法？

(2)五名徒弟不能相邻共有多少种排法？

(3)师傅和徒弟相间共有多少种排法？

**解**　(1)先将五名徒弟看做一人与五位师傅排列有 $A_6^6$种排法，五名徒弟再内部全排列有 $A_5^5$种排法，根据分步计数原理，共有 $A_6^6A_5^5=86\ 400$(种)排法.

(2)先将五位师傅全排列有 $A_5^5$种排法，再将五名徒弟排在五位师傅产生的 6 个空位上有 $A_6^5$种排法，根据分步计数原理，共有 $A_5^5A_6^5=86\ 400$(种)排法.

(3)先将五位师傅全排列有 $A_5^5$种排法，再将五名徒弟排在五位师傅产生的 6 个空位中的前五位或后五位上共有 $2A_5^5$种排法，根据分步计数原理，共有 $2A_5^5A_5^5=28\ 800$(种)排法.

18.(12 分)已知$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^n$的展开式中，前三项系数的绝对值依次成等差数列.

(1)求展开式中的常数项；

(2)求展开式中的所有整式项.

**解**　(1)$T_{r+1}=C_n^r(\sqrt{x})^{n-r}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^r(-1)^r$，∴前三项系数的绝对值分别为 $C_n^0$，$\frac{1}{2}C_n^1$，$\frac{1}{4}C_n^2$，由题意知 $C_n^1=C_n^0+\frac{1}{4}C_n^2$，∴$n=1+\frac{1}{8}n(n-1)$，$n\geqslant2$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$，解得 $n=8$ 或 $n=1$(舍去)，∴$T_{r+1}=C_8^r(\sqrt{x})^{8-r}\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^r=C_8^r\left(-\frac{1}{2}\right)^r x^{4-r}0\leqslant r\leqslant8$ 且 $r\in\mathbf{N}^*$，令 $4-r=0$ 得 $r=4$，∴展开式中的常数项为 $T_5=C_8^4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^4=\frac{35}{8}$.

(2)要使 $T_{r+1}$ 为整式项，需 $4-r$ 为非负数，且 $0\leqslant r\leqslant8$，

∴$r=0,1,2,3,4$.

∴展开式中的整式项为 $x^4$，$-4x^3$，$7x^2$，$-7x$，$\frac{35}{8}$.

19.(12 分)随着国民生活水平的提高，利用长假旅游的人越来越多.某公司统计了 2013 到 2017 年五年间本公司职员每年春节期间外出旅游的家庭数，具体统计数据如下表所示：

| 年份 $x$ | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 |
|---|---|---|---|---|---|
| 家庭数 $y$ | 6 | 10 | 16 | 22 | 26 |

(1)从这 5 年中随机抽取 2 年，求外出旅游的家庭数至少有 1 年多于 20 个的概率；

(2)利用所给数据，求出春节期间外出旅游的家庭数 $y$ 与年份 $x$ 之间的线性回归方程，并根据

所求出的线性回归方程估计该公司2020年春节期间外出旅游的家庭数.

参考公式：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

**解**　(1)事件“从这5年中任意抽取2年”包含的基本事件有$C_5^2=10$(个)，事件“至少有1年多于20个”的基本事件有$C_3^1C_2^1+C_2^2=7$(个)，则至少有1年多于20个的概率为$\dfrac{7}{10}$.

(2)由已知数据得$\overline{x}=2\,015$，$\overline{y}=16$，

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=(-2)\times(-10)+(-1)\times(-6)+0\times0+1\times6+2\times10=52,$$

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2=(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2=10.$$

所以$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{52}{10}=5.2$，

$\hat{a}=16-5.2\times2\,015=-10\,462$，

所以线性回归方程为$\hat{y}=5.2x-10\,462$.

当$x=2\,020$时，$y=5.2\times2\,020-10\,462=42$，

所以估计该公司2 020年春节期间外出旅游的家庭数为42.

20.(12分)现有4名学生去参加某高校的面试，面试要求用汉语或英语中的一种回答问题，每个考生被要求用英语回答问题的概率均为$\dfrac{1}{3}$.

(1)求这4名学生中恰有2人用英语回答问题的概率；

(2)用$X$，$Y$分别表示这4个人中用英语、汉语回答问题的人数，记$\xi=|X-Y|$，求随机变量$\xi$的概率分布与均值$E(\xi)$.

**解**　(1)记“4名学生中恰有2名用英语回答问题”为事件$A$，则$P(A)=C_4^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{8}{27}$.

(2)由题意知$\xi$的可能取值为0,2,4，

则$P(\xi=0)=P(X=2)=C_4^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{8}{27}$，

$P(\xi=2)=P(X=1)+P(X=3)=$

$C_4^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(1-\frac{1}{3}\right)^3+C_4^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(1-\frac{1}{3}\right)^1=\frac{40}{81}$,

$P(\xi=4)=P(X=0)+P(X=4)=C_4^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(1-\frac{1}{3}\right)^4+C_4^4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(1-\frac{1}{3}\right)^0=\frac{17}{81}$,

故随机变量$\xi$的概率分布为

| $\xi$ | 0 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{8}{27}$ | $\frac{40}{81}$ | $\frac{17}{81}$ |

$E(\xi)=0\times\frac{8}{27}+2\times\frac{40}{81}+4\times\frac{17}{81}=\frac{148}{81}$.

21.(12 分)通过随机询问 100 名性别不同的大学生是否爱好某项运动，得到如下 2×2 列联表：

| | 男 | 女 | 合计 |
|---|---|---|---|
| 爱好 | 40 | | |
| 不爱好 | | 25 | |
| 合计 | | 45 | 100 |

(1)将题中的 2×2 列联表补充完整；

(2)能否有 99%的把握认为是否爱好该项运动与性别有关？请说明理由；

(3)如果按性别进行分层抽样，从以上爱好该项运动的大学生中抽取 6 人组建“运动达人社”，现从“运动达人社”中选派 3 人参加某项校际挑战赛，记选出 3 人中的女大学生人数为 $X$，求 $X$ 的概率分布和均值.

附：

| $P(\chi^2\geqslant x_0)$ | 0.050 | 0.010 | 0.001 |
|---|---|---|---|
| $x_0$ | 3.841 | 6.635 | 10.828 |

$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

**解**　(1)题中的 2×2 列联表补充如下：

| | 男 | 女 | 合计 |
|---|---|---|---|
| 爱好 | 40 | 20 | 60 |
| 不爱好 | 15 | 25 | 40 |
| 合计 | 55 | 45 | 100 |

(2)能.$\chi^2=\frac{100\times(40\times25-20\times15)^2}{55\times45\times60\times40}\approx8.25>6.635$,

所以有 99%的把握认为是否爱好该项运动与性别有关.

(3)由题意，抽取 6 人中包括男生 4 名，女生 2 名，$X$ 的取值为 0,1,2，

则 $P(X=0)=\frac{C_4^3}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，

$P(X=1)=\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{5}$，

$P(X=2)=\frac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，

故 $X$ 的概率分布为

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |

$E(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{5}=1$.

22.(12 分)已知一个口袋有 $m$ 个白球，$n$ 个黑球($m$，$n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant2$)，这些球除颜色外全部相同.现将口袋中的球随机地逐个取出，并放入如图所示的编号为 1,2,3，…，$m+n$ 的抽屉内，其中第 $k$ 次取球放入编号为 $k$ 的抽屉($k=1,2,3$，…，$m+n$).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | … | $m+n$ |

(1)试求编号为 2 的抽屉内放的是黑球的概率 $p$；

(2)随机变量 $X$ 表示最后一个取出的黑球所在抽屉编号的倒数，$E(X)$是 $X$ 的均值，求证：$E(X)<\frac{n}{(m+n)(n-1)}$.

(1)**解**　编号为 2 的抽屉内放的是黑球的概率

$p=\frac{C_{m+n-1}^{n-1}}{C_{m+n}^{n}}=\frac{n}{m+n}$.

(2)**证明**　随机变量 $X$ 的概率分布为：

| $X$ | $\frac{1}{n}$ | $\frac{1}{n+1}$ | $\frac{1}{n+2}$ | … | $\frac{1}{k}$ | … | $\frac{1}{m+n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{C_{n-1}^{n-1}}{C_{m+n}^{n}}$ | $\frac{C_{n}^{n-1}}{C_{m+n}^{n}}$ | $\frac{C_{n+1}^{n-1}}{C_{m+n}^{n}}$ | … | $\frac{C_{k-1}^{n-1}}{C_{m+n}^{n}}$ | … | $\frac{C_{n+m-1}^{n-1}}{C_{m+n}^{n}}$ |

随机变量 $X$ 的均值 $E(X)=\sum_{k=n}^{m+n}\frac{1}{k}\cdot\frac{C_{k-1}^{n-1}}{C_{m+n}^{n}}=\frac{1}{C_{m+n}^{n}}\sum_{k=n}^{m+n}\frac{1}{k}\cdot\frac{(k-1)!}{(n-1)!\ (k-n)!}$.

所以 $E(X)<\frac{1}{C_{m+n}^{n}}\sum_{k=n}^{m+n}\frac{(k-2)!}{(n-1)!\ (k-n)!}$

$$=\frac{1}{(n-1)C_{m+n}^{n}}\sum_{k=n}^{m+n}\frac{(k-2)!}{(n-2)!\ (k-n)!}$$

$$=\frac{1}{(n-1)C_{m+n}^{n}}(1+C_{n-1}^{n-2}+C_{n}^{n-2}+\cdots+C_{m+n-2}^{n-2})$$

$$=\frac{1}{(n-1)C_{m+n}^{n}}(C_{n-1}^{n-1}+C_{n-1}^{n-2}+C_{n}^{n-2}+\cdots+C_{m+n-2}^{n-2})$$

$$=\frac{1}{(n-1)C_{m+n}^{n}}(C_{n}^{n-1}+C_{n}^{n-2}+\cdots+C_{m+n-2}^{n-2})$$

$$=\cdots=\frac{1}{(n-1)C_{m+n}^{n}}(C_{m+n-2}^{n-1}+C_{m+n-2}^{n-2})$$

$$=\frac{C_{m+n-1}^{n-1}}{(n-1)C_{m+n}^{n}}=\frac{n}{(m+n)(n-1)}.$$

所以 $E(X)<\frac{n}{(m+n)(n-1)}$.