江苏省仪征中学 2020 届高三（上）期中考试热身练习 8

班级_________ 姓名_________ 学号_________ 评价_________

一、填空题：

1．设集合 $A=\{1,2,3\}$， $B=\{2,4,6\}$，则 $A\cup B$ _______.

2．已知复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})z=\mathrm{i}$，其中 i 为虚数单位，则复数 z 的实部为_______.

3．函数 $f(x)=2\sin(\frac{\pi}{3}x+\frac{1}{4})$ 的周期为_______.

4．设命题 p：$\forall x>0$，$ln(x+1)>0$. 则$\neg p$ 为___________________.

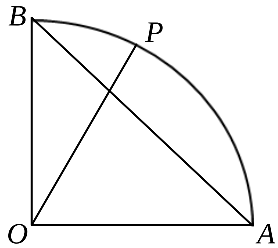
5．双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$的离心率为_______.

6．设函数 $f(x)=1-x\sin x$ 在 $x=x_0$ 处取极值，则 $(1+x_0^2)(1+\cos 2x_0)=$______.

7．过 $M(\frac{1}{2},1)$ 的直线 l 与圆 C：$(x-1)^2+y^2=4$ 交于 A、B 两点，当$\angle ACB$ 最小时，直线的方程为________________.

8．已知函数 $y=f(x+2)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称，且当 $x\in(0,+\infty)$ 时， $f(x)=\left|\log_2{}^x\right|$. 若 $a=f(-3),b=f(\frac{1}{4}),c=f(2),$ 则 a,b,c 由大到小的顺序是______________.

9．如图，在半径为 2 的扇形 AOB 中， $\angle AOB=90^\circ$， P 为 AB 上的一点，若 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=2$，则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的值为_______.



10．已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+1$（ e 为自然对数的底数），若 $f(2x-1)+f(4-x^2)>2$，则实数 x 的取值范围为_______.

11．已知实数 x,y 满足 $x^2+y^2=3$，$|x|\neq|y|$，则 $\frac{1}{(2x+y)^2}+\frac{4}{(x-2y)^2}$ 的最小值为_____.

12．已知点 P 是圆 $O:x^2+y^2=4$ 上的动点，点 $A(4,0)$，若直线 $y=kx+1$ 上总存在点 Q，使点 Q 恰是线段 AP 的中点，则实数 k 的取值范围为___________.

二、解答题

13. 已知向量$\overrightarrow{m}=(2,-1),\overrightarrow{n}=(\sin\dfrac{A}{2},\cos(B+C))$, 角$A,B,C$为$\Delta ABC$的内角，其所对的边分别为$a,b,c.$

（1）当$\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}$取得最大值时，求角$A$的大小；

（2）在（1）成立的条件下，当$a=\sqrt{3}$时，求b^2+c^2的取值范围.

14. 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$过点$(0,\sqrt{2})$，且满足$a+b=3\sqrt{2}$.

（1）求椭圆C的方程；

（2）斜率为$\dfrac{1}{2}$的直线交椭圆C于两个不同点A，B，点M的坐标为$(2,1)$，设直线MA与MB的斜率分别为k_1，k_2.

① 若直线过椭圆C的左顶点，求此时k_1，k_2的值；

② 试探究k_1+k_2是否为定值？并说明理由.

15. 如图所示,直立在地面上的两根钢管 AB 和 CD,$AB = 10\sqrt{3}m$,$CD = 3\sqrt{3}m$,现用钢丝绳对这两根钢管进行加固,有两种方法:

(1)如图(1)设两根钢管相距 $1m$,在 AB 上取一点 E,以 C 为支点将钢丝绳拉直并固定在地面的 F 处,形成一个直线型的加固(图中虚线所示).则 BE 多长时钢丝绳最短?

(2)如图(2)设两根钢管相距$3\sqrt{3}m$,在 AB 上取一点 E,以 C 为支点将钢丝绳拉直并固定在地面的 F 处,再将钢丝绳依次固定在 D 处、B 处和 E 处,形成一个三角形型的加固(图中虚线所示).则 BE 多长时钢丝绳最短?

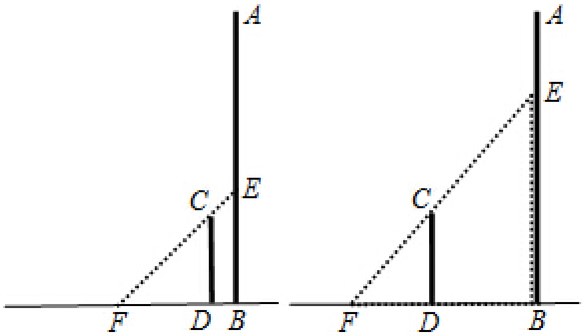


图 1　　图 2

三、附加题

16. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$,$C = AB$.

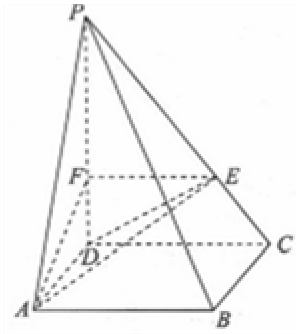
(1)求矩阵 C;

(2)若直线l_1：$x + y = 0$在矩阵 C 对应的变换作用下得到另一直线l_2,求l_2的方程.

17. 如图,四边形 $ABCD$ 为正方形,$PD \perp 平面ABCD$,$PD = \sqrt{3}AD$,$AE \perp PC$于点 E,$EF//CD$,交 PD 于点 F.

(1)证明：$平面ADE \perp 平面PBC$；

(2)求二面角$D-AE-F$的余弦值.



18. 甲、乙两人组成“星队”参加猜成语活动,每轮活动由甲、乙各猜一个成语,在一轮活动中,如果两人都猜对,则“星队”得 3 分；如果只有一个人猜对,则“星队”得 1 分；如果两人都没猜对,则“星队”得 0 分.已知甲每轮猜对的概率是$\frac{3}{4}$,乙每轮猜对的概率是$\frac{2}{3}$；每轮活动中甲、乙猜对与否互不影响.各轮结果亦互不影响.假设“星队”参加两轮活动,求：

(I)“星队”至少猜对 3 个成语的概率；

(II)“星队”两轮得分之和为 X 的分布列和数学期望EX.

答案：

一、填空题：1． $\{1,2,3,4,6\}$； 2． $\frac{1}{2}$； 3． 6； 4． $\exists x>0$，$ln(x+1)\le 0$． 5． 2；6. 2；

7． $2x-4y+3=0$； 8． $b>a>c$； 9． $-2+2\sqrt{3}$； 10． $(-1,3)$； 11． $\frac{3}{5}$； 12． $[-\frac{4}{3},0]$．

二、解答题:

13. 解：（1）$\vec{m}\cdot\vec{n}=2\sin\frac{A}{2}-\cos(B+C)=2\sin\frac{A}{2}+\cos A=-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}+1$， $t=\sin\frac{A}{2}$， 令

$t\in(0,1)$，原式 $=-2t^2+2t+1$，当 $t=\frac{1}{2}$，即 $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$，$\angle A=\frac{\pi}{3}$时，$\vec{m}\cdot\vec{n}$取得最大值.

（2）当$\angle A=\frac{\pi}{3}$时，$\angle B+\angle C=\frac{2\pi}{3}$，$B\in(0,\frac{2\pi}{3})$.由正弦定理得：$\frac{a}{\sin A}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2=2R$ （R为ΔABC的外接圆半径）于是$b^2+c^2=(2R\sin B)^2+(2R\sin C)^2=(2\sin B)^2+(2\sin C)^2=4\sin^2B+4\sin^2C$

$=4\sin^2B+4\sin^2(A+B)$

$=4\frac{1-\cos 2B}{2}+4\frac{1-\cos 2(A+B)}{2}=4-2\cos 2B-2\cos(\frac{2\pi}{3}+2B)=4-2\cos 2B-2((-\frac{1}{2})\cos 2B-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2B)$

$=4+\sqrt{3}\sin 2B-\cos 2B=4+2\sin(2B-\frac{\pi}{6})$.由$B\in(0,\frac{2\pi}{3})$，得$2B-\frac{\pi}{6}\in(-\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6})$，于是$\sin(2B-\frac{\pi}{6})\in(-\frac{1}{2},1]$，

$4+2\sin(2B-\frac{\pi}{6})\in(3,6]$，所以$b^2+c^2$的范围是$(3,6]$.

（1）由椭圆过点$(0,\sqrt{2})$，则$b=\sqrt{2}$，又$a+b=3\sqrt{2}$，故$a=2\sqrt{2}$，

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$；（2）① 若直线过椭圆的左顶点，则直线的方程是 $l:y=\frac{1}{2}x+\sqrt{2}$，

由$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+\sqrt{2}, \\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1 \end{cases}$ 解得$\begin{cases} x_1=0, \\ y_1=\sqrt{2}, \end{cases}$或$\begin{cases} x_2=-2\sqrt{2}, \\ y_2=0. \end{cases}$

故$k_1=-\frac{\sqrt{2}-1}{2}$，$k_2=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$．② k_1+k_2 为定值，且$k_1+k_2=0$．

设直线的方程为 $y=\frac{1}{2}x+m$，由$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+m, \\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1 \end{cases}$消$y$，得$x^2+2mx+2m^2-4=0$．

14. 当$\Delta=4m^2-8m^2+16>0$，即$-2<m<2$时，直线与椭圆交于两点．

设 $A(x_1,y_1)$．$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-2m$， $x_1x_2=2m^2-4$．

又 $k_1=\dfrac{y_1-1}{x_1-2}$， $k_2=\dfrac{y_2-1}{x_2-2}$， 故 $k_1+k_2=\dfrac{y_1-1}{x_1-2}+\dfrac{y_2-1}{x_2-2}=\dfrac{(y_1-1)(x_2-2)+(y_2-1)(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}$．

又 $y_1=\dfrac{1}{2}x_1+m$， $y_2=\dfrac{1}{2}x_2+m$，

所以 $(y_1-1)(x_2-2)+(y_2-1)(x_1-2)=(\dfrac{1}{2}x_1+m-1)(x_2-2)+(\dfrac{1}{2}x_2+m-1)(x_1-2)$

$=x_1x_2+(m-2)(x_1+x_2)-4(m-1)=2m^2-4+(m-2)(-2m)-4(m-1)=0$．

故 $k_1+k_2=0$．

15. 【答案】解：(1)设钢丝绳长为 ym,$\angle CFD=\theta$,则

$y=\dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{tan\theta}+1}{cos\theta}=\dfrac{3\sqrt{3}}{sin\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}$(其中$0<\theta<\theta_0,tan\theta_0=7\sqrt{3}$),

$y'=\dfrac{-3\sqrt{3}cos\theta}{\sin^2\theta}+\dfrac{sin\theta}{\cos^2\theta}$,

易知$y'=\dfrac{-3\sqrt{3}cos\theta}{\sin^2\theta}+\dfrac{sin\theta}{\cos^2\theta}$为$(0,\theta_0)$上的增函数,

且当$tan\theta=\sqrt{3}$时,$y'=0$;

故$y=\dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{tan\theta}+1}{cos\theta}=\dfrac{3\sqrt{3}}{sin\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}$在$(0,\theta_0)$上先减后增,

故当$tan\theta=\sqrt{3}$时,即$BE=4\sqrt{3}$时,$y_{min}=8$;

(2)设钢丝绳长为 ym,$\angle CFD=\theta$,则

$y=(\dfrac{3\sqrt{3}}{sin\theta}+\dfrac{3\sqrt{3}}{cos\theta})(1+cos\theta+sin\theta)$(其中$0<\theta<\theta_0,tan\theta_0=\dfrac{12\sqrt{3}-3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=3$),

$y'=(\dfrac{-3\sqrt{3}cos\theta}{\sin^2\theta}+\dfrac{sin\theta}{\cos^2\theta})(1+sin\theta+cos\theta)+(\dfrac{3\sqrt{3}}{sin\theta}+\dfrac{3\sqrt{3}}{cos\theta})(cos\theta-sin\theta)$,

令 $y'=0$ 得$sin\theta=cos\theta$,

当$\theta=\frac{\pi}{4}$时,即$BE=6\sqrt{3}$时,

$y_{min}=6\sqrt{3}(\sqrt{2}+2)$;

答：按方法(1),$BE=4\sqrt{3}$米时,钢丝绳最短；按方法(2),$BE=6\sqrt{3}$米时,钢丝绳最短.

16、【答案】解：(1)$C=AB=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\end{bmatrix}$.

(2)设直线l_1：$x+y=0$上任意一点(x,y)在矩阵 C 对应的变换作用下得到点(x',y'),则

$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$,

其坐标变换公式为 $\begin{cases}x'=x+2y,\\y'=-x+y.\end{cases}$ 由此得 $\begin{cases}x=\dfrac{x'-2y'}{3},\\y=\dfrac{x'+y'}{3},\end{cases}$

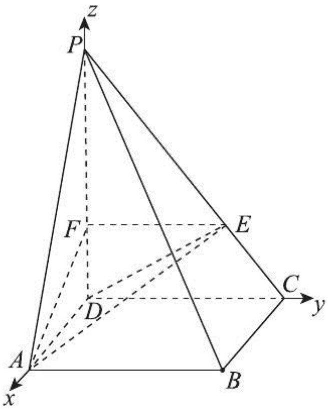
代入$x+y=0$得$\frac{2x'-y'}{3}=0$,即$2x'-y'=0$,

所以直线l_2的方程为$2x-y=0$.

17、【答案】(1)证明：$\because PD\perp$平面$ABCD$,$\therefore PD\perp AD$,

$\because AD\perp DC$,$\therefore AD\perp$平面PDC,$\therefore AD\perp PC$.

$\because AE\perp PC$,$\therefore PC\perp$平面ADE,$\therefore$平面$ADE\perp$平面PBC;



(2)解：设$AB=1$,则$PD=\sqrt{3}AD=\sqrt{3}$,$PC=PA=2$,

由(Ⅰ)知$PC\perp$平面ADE,$\therefore DE\perp PC$,$CE=\frac{1}{2}$,$PE=\frac{3}{2}$,

以DA,DC,DP为x,y,z轴建立空间直角坐标系,

$D(0,0,0)$,$A(1,0,0)$,$C(0,1,0)$,$B(1,1,0)$,$P(0,0,\sqrt{3})$,$E(0,\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})$,$F(0,0,\frac{\sqrt{3}}{4})$,

设$\vec{n_1}\perp$平面AEF,$\vec{n_1}=(x,y,z)$,$\overrightarrow{AE}=\left(-1,\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$,$\overrightarrow{AF}=\left(-1,0,\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$,$\begin{cases}n_1\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ n_1\cdot\overrightarrow{AF}=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}-x+\frac{3}{4}y+\frac{\sqrt{3}}{4}z=0,\\ -x+\frac{\sqrt{3}}{4}z=0,\end{cases}$ $x=\sqrt{3}$,$y=0$,$z=4$,$\therefore \vec{n_1}=(\sqrt{3},0,4)$.

$\because PC\perp$平面ADE,$\overrightarrow{PC}=(0,1,-\sqrt{3})$,

设二面角$D-AE-F$的平面角为θ,$\cos\theta=\frac{n_1\cdot\overrightarrow{PC}}{|n_1|\cdot|\overrightarrow{PC}|}=\frac{-2\sqrt{57}}{19}$,

$\because$二面角$D-AE-F$的平面角为锐角,$\therefore$二面角$D-AE-F$的余弦值为$\dfrac{2\sqrt{57}}{19}$.

18、【答案】解：(I)“星队”至少猜对 3 个成语包含“甲猜对 1 个,乙猜对 2 个”,“甲猜对 2 个,乙猜对 1 个”,“甲猜对 2 个,乙猜对 2 个”三个基本事件,

故概率$P=C_2^1\cdot\frac{3}{4}\cdot(1-\frac{3}{4})\cdot(\frac{2}{3})^2+(\frac{3}{4})^2\cdot C_2^1\cdot\frac{2}{3}\cdot(1-\frac{2}{3})+(\frac{3}{4})^2\cdot(\frac{2}{3})^2=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$,

(II)“星队”两轮得分之和为 X 可能为：0,1,2,3,4,6,

则$P(X=0)=(1-\frac{3}{4})^2\cdot(1-\frac{2}{3})^2=\frac{1}{144}$,

$P(X=1)=2\times[\frac{3}{4}\cdot(1-\frac{3}{4})\cdot(1-\frac{2}{3})^2+(1-\frac{3}{4})^2\cdot\frac{2}{3}\cdot(1-\frac{2}{3})]=\frac{10}{144}$,

$P(X=2)=\frac{3}{4}\cdot(1-\frac{2}{3})\cdot\frac{3}{4}\cdot(1-\frac{2}{3})+\frac{3}{4}\cdot(1-\frac{2}{3})\cdot(1-\frac{3}{4})\cdot\frac{2}{3}+(1-\frac{3}{4})\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot(1-\frac{2}{3})+(1-\frac{3}{4})\cdot\frac{2}{3}\cdot(1-\frac{3}{4})\cdot\frac{2}{3}=\frac{25}{144}$,

$P(X=3)=2\times\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot(1-\frac{3}{4})\cdot(1-\frac{2}{3})=\frac{12}{144}$,

$P(X=4)=2\times[\dfrac{3}{4}\cdot(1-\dfrac{3}{4})\cdot(\dfrac{2}{3})^2+\dfrac{2}{3}\cdot(1-\dfrac{2}{3})\cdot(\dfrac{3}{4})^2]=\dfrac{60}{144}$

$P(X=6)=(\dfrac{3}{4})^2\cdot(\dfrac{2}{3})^2=\dfrac{36}{144}$

故 X 的分布列如下图所示：

X	0	1	2	3	4	6
P	$\dfrac{1}{144}$	$\dfrac{10}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{12}{144}$	$\frac{60}{144}$	$\dfrac{36}{144}$

$\therefore$数学期望$EX=0\times\frac{1}{144}+1\times\frac{10}{144}+2\times\frac{25}{144}+3\times\frac{12}{144}+4\times\frac{60}{144}+6\times\frac{36}{144}=\frac{552}{144}=\frac{23}{6}$