基于“题组教学”的高三复习课设计
——以“二次函数恒成立问题”为例

范世祥
（安徽省和县第三中学）

摘　要：题组教学，即把相关联的知识和方法通过精心设计，变成一系列问题或题组，利用它们组织课堂教学．以“二次函数恒成立问题”为例，探究试题解法，形成一题多解，展示数学问题解决的多元化；突出一题多变，展示数学问题的可变性；最后通过对问题的化归，强化一题多用，揭示问题的本质．据此可知：数学问题的解决，应多关注其本质，以期更好地理解数学．

关键词：一题多解；一题多变；一题多用；题组教学

高三复习课通过设计合理的题组，能够突破简单的题型模仿和日复一日的题海训练，从而让学生学会思考、学会迁移、学会应用．

本文聚焦“二次函数恒成立问题”，采用题组教学实现问题的多变和多用，并借此谈谈高三复习课的教学感悟．

一、教学设计简述

引例　已知 $x\in[-1,\ 1]$ 时，$f(x)=x^2-ax+\frac{a}{2}>0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围．

1．一题多解，学会思考

同一道数学题，从不同的角度思考可以得到多种解题思路．广泛寻求多种解法，有助于拓宽解题思路，发展观察、想象、探索、思考等能力．

思路1：原问题直接转化为求函数 $f(x)=x^2-ax+\frac{a}{2}$ 在 $x\in[-1,\ 1]$ 上的最小值，然后让函数的最小值大于0即可．

思路2：$x^2-ax+\frac{a}{2}>0$ 变形为 $a\left(x-\frac{1}{2}\right)<x^2$，然后按照 $x\in\left[-1,\ \frac{1}{2}\right)$ 和 $x\in\left(\frac{1}{2},\ 1\right]$ 分离参数进行讨论．

思路3：根据判别式 $\Delta=a^2-2a$，结合二次函数 $f(x)=x^2-ax+\frac{a}{2}$ 的图象进行分类讨论．

思路4：问题转化为 $a\left(x-\frac{1}{2}\right)<x^2$ 在 $x\in[-1,\ 1]$ 上恒成立．在同一坐标系中，分别作出函数 $y=x^2$ 和函数 $y=a\left(x-\frac{1}{2}\right)$（恒过定点）的图象，数形结合即可．

解需有法，解无定法．大法必依，小法必活．思路1和思路2重在训练学生对函数最值的计算能力，思路3和思路4更注重数形结合思想的渗透．

可见，题目信息与不同数学知识的结合，可能会形成多个解题方向，这是一题多解产生的主要原因，若能取其中最简捷的路径，就可以得到题目的最优解法．提倡一题多解，并非是鼓励简单地罗列各种解法，而是在解后反思中“多解选优”，使学生的解题能力在解后反思中形成与提高．

2．一题多变，学会迁移

数学解题教学应突出探索活动，而且探索活动不应停留在对原习题的解法的探索上，而应适当地对原习题进行深层次的探索，挖掘出更深刻的结论，这就是数学教学中的变式艺术．

变式，是一种探索问题的方法，也是一种值得提

收稿日期：2017—01—24
作者简介：范世祥（1985—），男，中学一级教师，主要从事中学数学教育教学研究．

倡的学习方法，它可以激发学生学习数学的兴趣，有效地提高学生的数学水平.

对于引例，教学中通过以下两个题组，进行变式训练.

题组1：

（1）若不等式 $x^2+2(a-2)x+4>0$ 对任意 $x\in[-3,\ 1]$ 恒成立，则 a 的取值范围是________.

（2）若不等式 $x^2+2(a-2)x+4<0$ 对任意 $x\in[-3,\ -1]$ 恒成立，则 a 的取值范围是________.

（3）若不等式 $2ax^2-ax+1\geqslant 0$ 对任意 $x\in(0,\ +\infty)$ 恒成立，则 a 的取值范围是________.

（4）若不等式 $x^2-2ax-3a^2\geqslant 0$ 对任意 $x\in(1,\ 2)$ 恒成立，则 a 的取值范围是________.

对于(1)，与引例几乎相同，设置此题的目的就是通过训练同类题来巩固方法，也想看看学生是如何做到“多解优选”的. 上文所述4种思路均可解决，让学生自己体验和选择.

对于(2)，设计意图与(1)形成对比，题目类似，但方法不同. 结合二次函数图象可知，当开口向上时，若 $f(x)<0$ 在区间 $[m,\ n]$ 上恒成立，只需 $\begin{cases}f(m)<0,\\ f(n)<0\end{cases}$ 即可，以合理选择思路，实现优化解题.

对于(3)，若二次函数图象的开口向下，则 $x\to+\infty$ 时，$y<0$，由此可知该题中 $a\geqslant 0$. 显然 $a=0$ 符合题意；当 $a>0$ 时，对称轴是 $x=\frac{1}{4}$，所以函数在 $(0,\ +\infty)$ 上的最小值为 $f\left(\frac{1}{4}\right)$，所以只需 $f\left(\frac{1}{4}\right)\geqslant 0$ 即可.

对于(4)，就更能体现方法服从题目了. 因为方程 $x^2-2ax-3a^2=(x-3a)(x+a)=0$ 的两个根为 $x_1=3a$，$x_2=-a$，结合两根的大小比较，以及函数图象，可以制定出分类讨论的标准，从而解决问题.

题组2：

（1）若任意 $x\in[1,\ 3]$，不等式 $x^2-\frac{5}{2}mx+4>0$ 恒成立，则 m 的取值范围是________.

（2）若存在 $x\in[1,\ 3]$，不等式 $x^2-\frac{5}{2}mx+4>0$ 有解，则 m 的取值范围是________.

（3）若对任意 $m\in[1,\ 2]$，不等式 $x^2-\frac{5}{2}mx+4>0$ 恒成立，则 x 的取值范围是________.

对于(1)和(2)，对比“恒成立”与“能成立”的区别，该题适宜采用分离参数法. 其中对于(1)，有 $\frac{5}{2}m<\left(x+\frac{4}{x}\right)_{\min}$；对于(2)，有 $\frac{5}{2}m<\left(x+\frac{4}{x}\right)_{\max}$，问题转化为求 $y=x+\frac{4}{x}$ 在 $x\in[1,\ 3]$ 上的最大值和最小值.

对于(3)，将 m 看作主元，令 $g(m)=-\frac{5}{2}xm+x^2+4$，因为 $g(m)$ 是关于 m 的一次函数，所以只需要 $\begin{cases}g(1)>0,\\ g(2)>0\end{cases}$ 即可.

通过设计这样的题组，将知识与方法集中进行对比、分析，促进知识条理化和系统化，进而提高学生分析问题和解决问题的能力，使学生形成良好的数学认识结构.

3. 一题多用，学会化归

教学例题大多有广泛的应用价值. 一题多解，实现了由点到线的变化；一题多用，又产生了线扩大到面的变化. 这样，例题教学便可多层次、广视角、全方位地进行研究和拓展，充分发挥潜能.

恒成立问题有着广泛的应用，有些试题表面上未涉及到“恒成立”字样，通过化归即可转化为恒成立问题，体现化陌生为熟悉的思维过程. 为此，笔者设计了题组3供学生练习.

题组3：

（1）已知函数 $f(x)=\lg(mx^2+mx+3)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，求实数 m 的取值范围.

（2）已知函数 $f(x)=x^3-3(a-1)x^2-6ax$，当 $a>0$ 时，若函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,\ 2]$ 上是单调函数，求实数 a 的取值范围.

（3）若函数 $f(x)=x-\frac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上单调递增，求实数 a 的取值范围.

（4）已知函数 $f(x)=2mx^2-2(4-m)x+1$，$g(x)=mx$，若对于任一实数 x，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的值至少有一个为正，求实数 m 的取值范围.

对于(1)，问题转化为 $mx^2+mx+3>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，这是学生熟悉的题目.

对于(2)，由题意可知，$f'(x)=3x^2-6(a-1)x-6a$ 在

$[-1,\ 2]$ 上恒大于等于0或恒小于等于0，分两种情况讨论，但注意到 $f'(-1)=-3<0$，则 $f'(x)=3x^2-6(a-1)x-6a$ 在 $[-1,\ 2]$ 上只能恒小于等于0，然后由题组1（2）的解题经验就轻松搞定了. 该题单调性不确定，但由于在端点 $x=-1$ 处导数为负，所以导数只可能恒小于等于0，端点在该题解答过程中起到至关重要的作用，避免了繁杂的分类讨论，我们把这种通过端点来缩小参数取值范围的方法称为“端点效应”.

对于（3），该题将导数与三角函数结合在一起进行考查，有所创新，求解的关键是把函数的单调性问题转化为不等式的恒成立问题，再通过换元，进一步转化为二次函数的恒成立问题. 换元时，一定要注意新元的范围，$f'(x)=1-\dfrac{2}{3}\cos 2x+a\cos x\geqslant 0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，即 $4\cos^2 x-3a\cos x-5\leqslant 0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，可通过换元变形为 $4t^2-3at-5\leqslant 0$ 对 $t\in[-1,\ 1]$ 恒成立. 此时回到题组1（2）的解题思路上即可.

对于（4），当 $m=0$ 时，显然不满足；当 $m<0$，$x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的值均为负数，所以必有 $m>0$. 此时，$g(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上恒为正，所以只需 $f(x)=2mx^2-2(4-m)x+1>0$ 在 $(-\infty,\ 0]$ 上恒成立即可. 问题可以进一步转化为求函数 $f(x)=2mx^2-2(4-m)x+1$ 在 $(-\infty,\ 0]$ 上的最小值，只要比较对称轴与 y 轴的位置关系，进行分类讨论即可. 所以有 $\begin{cases}\dfrac{4-m}{2m}\geqslant 0,\\ f(0)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\dfrac{4-m}{2m}<0,\\ f\left(\dfrac{4-m}{2m}\right)>0.\end{cases}$ 解得 $0<m<8$.

4. 解后反思，回归本源

养成解后反思的习惯是提高学习效率、培养数学能力行之有效的方法. 本节课的设计主要是解决有关二次函数的恒成立问题，从一题多解中训练学生的思维，从一题多变中筛选出最优的解题策略，从一题多用中提高学生的化归与转化能力.

经历了三个题组的训练，学生自觉地反思有关二次函数的恒成立问题的解题策略，主要有两种：一是分离变量法，$a<g(x)$ 恒成立，即 $a<g(x)_{\min}$，问题转化为求 $y=g(x)$ 在区间上的值域；二是不分离，$f(x)>0$ 恒成立，即 $f(x)_{\min}>0$，同样，问题转化为求 $y=f(x)$ 在区间上的值域，此时求函数的值域往往要对参数进行分类讨论. 学生关于函数值域的计算能力决定着本节课的问题解决能力，这是处理恒成立问题的核心思想. 但是方法服从题目，题组1（2）很好地验证了这一点，多一点想，就少一点算. 同样地，题组3（2）以及题组3（3）的最终落脚点都在于此.

当我们获得问题的一种解法后，不要为一时的收获而“沾沾自喜”，使思维停滞不前，要对自己的思维过程进行积极的反思与监控：是否有可以改进的地方？能否删除多余的环节？题目会有怎样的变化和发展？从而通过反思加深对问题本质的理解.

二、教学感悟

题组教学，是设计一组或多组具有典型代表性的题目作为例题，每组中采用同题多变、同题多解、同类问题不同方法或同种方法不同问题等，进行例题的设计，摒弃例题和习题的离散堆积.

高三复习课的根本任务是梳理概念，形成网络，构建知识间的联系，进而提升能力，拓展思维.

一方面，复习课的教学要重视利用本原性问题进行驱动. 例如，函数的值域是求解二次函数恒成立问题的本源知识，课堂上，教师要从这样的问题出发，串联问题、探究知识、揭示方法，引导学生进行火热的思考.

另一方面，解题教学要重视反思与回顾. 显然，如果没有反思与回顾，不仅没有这个问题的多种解法，更不会有关于这个问题的类比和变式，也就体验不到问题的活力和价值了，这无疑是入宝山而空返. 正如费赖登塔尔所言：反思是一种重要的数学活动，它是数学活动的核心.

参考文献：

［1］中华人民共和国教育部制订. 普通高中数学课程标准（实验）[M]. 北京：人民教育出版社，2003.

［2］王芝平，郭洁. 多解、多变与反思[J]. 中学数学教学参考（上旬），2004（7）：32-34.