

江苏省仪征中学 2021-2022 学年度第一学期高三数学学科导学案

§8.1 直线的方程

研制人：谢霞 审核人：陈宏强

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____ 授课日期：_____

①在平面直角坐标系中，结合具体图形掌握确定直线位置的几何要素，凸显直观想象的核心素养.

②理解直线的倾斜角和斜率的概念，掌握过两点的直线斜率的计算公式，凸显数学运算的核心素养.

③掌握确定直线的几何要素，掌握直线方程的三种形式(点斜式、两点式及一般式)，了解斜截式与一次函数的关系，凸显数学抽象的核心素养.

课前热身

1. (求倾斜角)直线 $\sqrt{3}x - y + a = 0$ 的倾斜角为()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{5\pi}{6}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

答案：B

2. (点斜式方程)经过点 $P(2, -3)$ ，倾斜角为 45° 的直线方程为()

- A. $x + y + 1 = 0$ B. $x + y - 1 = 0$
C. $x - y + 5 = 0$ D. $x - y - 5 = 0$

解析：选 D 由点斜式得直线方程为 $y - (-3) = \tan 45^\circ (x - 2) = x - 2$ ，即 $x - y - 5 = 0$.

3. (斜截式方程)倾斜角为 135° ，在 y 轴上的截距为 -1 的直线方程是()

- A. $x - y + 1 = 0$ B. $x - y - 1 = 0$
C. $x + y - 1 = 0$ D. $x + y + 1 = 0$

答案：D

4. (忽视倾斜角的范围)直线 $x + (m^2 + 1)y + 1 = 0$ 的倾斜角的取值范围是()

- A. $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ B. $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$
C. $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ D. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$

解析：选 B

5. (忽视斜率公式中 $x_1 \neq x_2$)已知经过两点 $A(m^2 + 2, m^2 - 3)$, $B(3 - m - m^2, 2m)$ 的直线 l 的倾斜角为 135° ，则 m 的值为_____.

答案： $\frac{4}{3}$

6. (忽视截距为 0 的情况)过点 $M(3, -4)$ ，且在两坐标轴上的截距相等的直线的方程为_____.

解析：①若直线过原点，则 $k = -\frac{4}{3}$ ，

所以 $y = -\frac{4}{3}x$ ，即 $4x + 3y = 0$.

②若直线不过原点，设 $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$ ，即 $x + y = a$.

若 $a \neq 0$, 设 l 的方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$,

因为 l 过点 $(4, 1)$, 所以 $\frac{4}{a} + \frac{1}{a} = 1$,

所以 $a = 5$, 所以 l 的方程为 $x + y - 5 = 0$.

综上所述, 所求直线的方程为 $x - 4y = 0$ 或 $x + y - 5 = 0$.

(2) 由已知设直线 $y = 3x$ 的倾斜角为 α , 则所求直线的倾斜角为 2α .

因为 $\tan \alpha = 3$, 所以 $\tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = -\frac{3}{4}$.

又直线经过点 $A(-1, -3)$,

因此所求直线方程为 $y + 3 = -\frac{3}{4}(x + 1)$,

即 $3x + 4y + 15 = 0$.

(3) 由题意可知, 所求直线的斜率为 ± 1 .

又过点 $(3, 4)$, 由点斜式得 $y - 4 = \pm(x - 3)$.

故所求直线的方程为 $x - y + 1 = 0$ 或 $x + y - 7 = 0$.

考点三 直线方程的综合应用

例 3. 直线 l 过点 $P(1, 4)$, 分别交 x 轴的正半轴和 y 轴的正半轴于 A, B 两点, O 为坐标原点, 当 $|OA| + |OB|$ 最小时, 求 l 的方程.

[解] 法一: 依题意, l 的斜率存在, 且斜率为负,

设直线 l 的斜率为 k ,

则直线 l 的方程为 $y - 4 = k(x - 1) (k < 0)$.

令 $y = 0$, 可得 $A\left(1 - \frac{4}{k}, 0\right)$;

令 $x = 0$, 可得 $B(0, 4 - k)$.

$|OA| + |OB| = \left(1 - \frac{4}{k}\right) + (4 - k) = 5 - \left(k + \frac{4}{k}\right)$

$= 5 + \left(-k + \frac{4}{-k}\right) \geq 5 + 4 = 9$.

当且仅当 $-k = \frac{4}{-k}$ 且 $k < 0$,

即 $k = -2$ 时, $|OA| + |OB|$ 取最小值.

此时 l 的方程为 $2x + y - 6 = 0$.

法二: 设直线 l 与 x 轴、 y 轴的交点坐标分别为 $A(a, 0)$, $B(0, b) (a > 0, b > 0)$, 则直线 l 的方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

$\because$ 直线 l 过点 $P(1, 4)$, $\therefore \frac{1}{a} + \frac{4}{b} = 1$,

$\therefore |OA| + |OB| = a + b = (a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b}\right)$

$$=5+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\geq 5+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}=9,$$

当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{4a}{b}$, 即 $\begin{cases} a=3, \\ b=6 \end{cases}$ 时 “=” 成立.

$|OA|+|OB|$ 取最小值, 此时 l 的方程为 $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=1$, 即 $2x+y-6=0$.

课堂小结

跟踪反馈

1. 过点 $A(0,2)$ 且倾斜角的正弦值是 $\frac{3}{5}$ 的直线方程为()

A. $3x-5y+10=0$

B. $3x-4y+8=0$

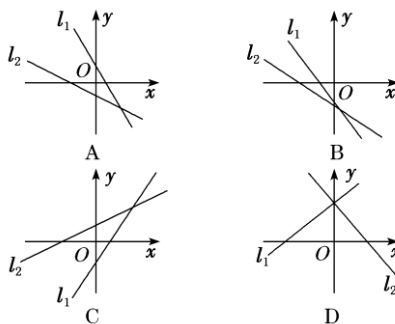
C. $3x+4y+10=0$

D. $3x-4y+8=0$ 或 $3x+4y-8=0$

解析: 选 D 设所求直线的倾斜角为 α , 则 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\therefore \tan \alpha = \pm \frac{3}{4}$, $\therefore$ 所求直线方程为 $y = \pm \frac{3}{4}x + 2$,

即为 $3x-4y+8=0$ 或 $3x+4y-8=0$. 故选 D.

2. 在同一平面直角坐标系中, 直线 $l_1: ax+y+b=0$ 和直线 $l_2: bx+y+a=0$ 有可能是()



解析: 选 B 由题意 $l_1: y = -ax - b$, $l_2: y = -bx - a$, 当 $a > 0$, $b > 0$ 时, $-a < 0$, $-b < 0$.

3. 已知直线 l 的斜率为 $\sqrt{3}$, 在 y 轴上的截距为另一条直线 $x-2y-4=0$ 的斜率的倒数, 则直线 l 的方程为()

A. $y = \sqrt{3}x + 2$

B. $y = \sqrt{3}x - 2$

C. $y = \sqrt{3}x + \frac{1}{2}$

D. $y = -\sqrt{3}x + 2$

解析: 选 A $\because$ 直线 $x-2y-4=0$ 的斜率为 $\frac{1}{2}$,

$\therefore$ 直线 l 在 y 轴上的截距为 2,

解析：选 A、B、D 因为 $AC=BC$ ，所以欧拉线为 AB 的中垂线，又 $A(2,0)$ ， $B(0,4)$ ，故 AB 的中点为 $(1,2)$ ， $k_{AB}=-2$ ，故 AB 的中垂线方程为 $y-2=\frac{1}{2}(x-1)$ ，即 $x-2y+3=0$ ，故选 A、B、D.

8. 曲线 $y=x^3-x+5$ 上各点处的切线的倾斜角的取值范围为_____.

解析：记曲线上点 P 处的切线的倾斜角是 θ ，

因为 $y'=3x^2-1\geq -1$ ，所以 $\tan \theta \geq -1$ ，

所以 θ 为钝角时，应有 $\theta \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ ；

θ 为锐角时， $\tan \theta \geq -1$ 显然成立.

综上， θ 的取值范围是 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$.

答案： $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$

9. 已知 $A(1,1)$ ， $B(3,5)$ ， $C(a,7)$ ， $D(-1, b)$ 四点共线，则 $a=_____$ ， $b=_____$.

【解析】 因为 A, B, C, D 四点共线，所以直线 AB, AC, AD 的斜率相等，又因为 $k_{AB}=2$ ， $k_{AC}=\frac{7-1}{a-1}$ ，

$k_{AD}=\frac{b-1}{-1-1}$ ，所以 $2=\frac{6}{a-1}=\frac{b-1}{-2}$. 所以 $a=4$ ， $b=-3$.

【答案】 4 -3

10. 已知 e 是自然对数的底数，函数 $f(x)=(x-1)e^x+3e$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线为 l ，则直线 l 的横截距为_____.

解析：因为 $f'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$ ，所以切线 l 的斜率为 $f'(1)=e$ ，由 $f(1)=3e$ 知切点坐标为 $(1, 3e)$ ，所以切线 l 的方程为 $y-3e=e(x-1)$. 令 $y=0$ ，解得 $x=-2$ ，故直线 l 的横截距为 -2 .

答案：-2

11. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点分别为 $A(-3,0)$ ， $B(2,1)$ ， $C(-2,3)$ ，求：

(1) BC 边所在直线的方程；

(2) BC 边上中线 AD 所在直线的方程；

(3) BC 边的垂直平分线 DE 的方程.

解：(1) 因为直线 BC 经过 $B(2,1)$ 和 $C(-2,3)$ 两点，

由两点式得 BC 的方程为 $\frac{y-1}{3-1}=\frac{x-2}{-2-2}$ ，即 $x+2y-4=0$.

(2) 设 BC 边的中点 D 的坐标为 (x, y) ，

则 $x = \frac{2-2}{2} = 0$, $y = \frac{1+3}{2} = 2$.

BC 边的中线 AD 过 A(-3,0), D(0,2) 两点,

由截距式得 AD 所在直线方程为 $\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1$,

即 $2x - 3y + 6 = 0$.

(3) 由(1)知直线 BC 的斜率 $k_1 = -\frac{1}{2}$,

则直线 BC 的垂直平分线 DE 的斜率 $k_2 = 2$.

由(2)知点 D 的坐标为 (0,2).

可求出直线的点斜式方程为 $y - 2 = 2(x - 0)$,

即 $2x - y + 2 = 0$.

12. 过点 P(2,1) 作直线 l, 与 x 轴和 y 轴的正半轴分别交于 A, B 两点, 求:

(1) $\triangle AOB$ 面积的最小值及此时直线 l 的方程;

(2) 求直线 l 在两坐标轴上截距之和的最小值及此时直线 l 的方程;

(3) 求 |PA| |PB| 的最小值及此直线 l 的方程.

解: (1) 设直线 l 的方程为 $y - 1 = k(x - 2)$, 则可得 $A\left(\frac{2k-1}{k}, 0\right)$, $B(0, 1-2k)$. $\because$ 与 x 轴, y 轴正半轴

分别交于 A, B 两点, $\therefore \begin{cases} \frac{2k-1}{k} > 0, \\ 1-2k > 0 \end{cases} \Rightarrow k < 0$.

于是 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} |OA| |OB|$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2k-1}{k} (1-2k) = \frac{1}{2} \left(4 - \frac{1}{k} - 4k \right)$

$\geq \frac{1}{2} \left[4 + 2 \sqrt{\left(-\frac{1}{k}\right)(-4k)} \right] = 4$.

当且仅当 $-\frac{1}{k} = -4k$, 即 $k = -\frac{1}{2}$ 时, $\triangle AOB$ 面积有最小值为 4, 此时, 直线 l 的方程为 $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2)$, 即 $x + 2y - 4 = 0$.

(2) $\because A\left(\frac{2k-1}{k}, 0\right)$, $B(0, 1-2k)(k < 0)$,

$\therefore$ 截距之和为 $\frac{2k-1}{k} + 1 - 2k = 3 - 2k - \frac{1}{k} \geq 3 + 2 \sqrt{(-2k)\left(-\frac{1}{k}\right)} = 3 + 2\sqrt{2}$.

当且仅当 $-2k = -\frac{1}{k}$, 即 $k = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 等号成立.

故截距之和最小值为 $3 + 2\sqrt{2}$, 此时 l 的方程为 $y - 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x - 2)$, 即 $\sqrt{2}x + 2y - 2 - 2\sqrt{2} = 0$.

(3) $\because A\left(\frac{2k-1}{k}, 0\right)$, $B(0, 1-2k)(k < 0)$,

$$\begin{aligned}\therefore |PA| + |PB| &= \sqrt{\frac{1}{k^2} + 1} \sqrt{4 + 4k^2} = \sqrt{\frac{4}{k^2} + 4k^2 + 8} \\ &\geq \sqrt{2 \sqrt{\frac{4}{k^2} \cdot 4k^2} + 8} = 4.\end{aligned}$$

当且仅当 $\frac{4}{k^2} = 4k^2$, 即 $k = -1$ 时上式等号成立, 故 $|PA| + |PB|$ 最小值为 4, 此时, 直线 l 的方程为 $x + y - 3 = 0$.