

周三小练(9) 答案

1. 若 $C_8^x = C_8^{2x-1}$, 则 x 的值为 _____. 1 或 3

【解析】

1. 解: $\because C_8^x = C_8^{2x-1}$,

$$\therefore x = 2x - 1 \text{ 或 } x + (2x - 1) = 8,$$

$$\text{解 } x = 1 \text{ 或 } x = 3;$$

$$\therefore x \text{ 的值为 } 1 \text{ 或 } 3.$$

故答案为: 1 或 3

2. 在 $(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x})^n$ 的二项式中, 所有的二项式系数之和为 256, 则常数项等于 _____.

解: $\because$ 在 $(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x})^n$ 的二项式中, 所有的二项式系数之和为 256,

$$\therefore 2^n = 256, \text{ 解得 } n = 8,$$

$$\therefore (\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x})^8 \text{ 中, } T_{r+1} = C_8^r (\sqrt[3]{x})^{8-r} (-\frac{2}{x})^r = (-2)^r C_8^r x^{\frac{8-r}{3}},$$

$$\therefore \text{当 } \frac{8-r}{3} = 0, \text{ 即 } r = 2 \text{ 时, 常数项为 } T_3 = (-2)^2 C_8^2 = 112.$$

故答案为 112.

3. 若 n 是正整数, 则 $7^n + 7^{n-1}C_n^1 + 7^{n-2}C_n^2 + \dots + 7C_n^{n-1}$ 除以 9 的余数是 _____.

【答案】 0 或 7

【解析】

$$\text{解: } 7^n + 7^{n-1}C_n^1 + 7^{n-2}C_n^2 + \dots + 7C_n^{n-1} = (7+1)^n - 1 = 8^n - 1 = (9-1)^n - 1 = C_n^0 9^n + C_n^1 9^{n-1}(-1) + \dots + C_n^{n-1} 9^1(-1)^{n-1} + C_n^n 9^0(-1)^n - 1$$

$$+ \dots + C_n^{n-1} 9^1(-1)^{n-1} + C_n^n 9^0(-1)^n - 1$$

$$\text{① } n \text{ 是正偶数, 则原式} = (9-1)^n - 1 = C_n^0 9^n + C_n^1 9^{n-1}(-1) + \dots + C_n^{n-1} 9^1(-1)^{n-1} + C_n^n 9^0(-1)^n - 1$$

每项都是 9 的倍数.

$\therefore$ 这个式子都可以被 9 整除, 此时余数为 0.

$$\text{② 若 } n \text{ 是正奇数, 则原式} = C_n^0 9^n + C_n^1 9^{n-1}(-1) + \dots + C_n^{n-1} 9^1(-1)^{n-1} + C_n^n 9^0(-1)^n - 1.$$

$$= C_n^0 9^n + C_n^1 9^{n-1}(-1) + \dots + C_n^{n-1} 9^1(-1)^{n-1} + C_n^n 9^0(-1)^n - 1.$$

$\therefore -2$ 不能整除 9

$\therefore$ 余数就应该是 7.

综上, 余数应该是 0 或 7.

故答案为: 0 或 7.

4. 国家教育部为了发展贫困地区教育, 在全国重点师范大学免费培养教育专业师范生, 毕业

后要分到相应的地区任教. 现有 6 个免费培养的教育专业师范毕业生要平均分到 3 所学校去任教, 有_____种不同的分派方法.

分三步, 第一步在 6 个人中选取 2 个去第一个学校, 第二步在剩下的四个人中选取 2 个人去第二个学校, 第三步剩下的 2 个人去第三个学校, 分别计算方法数, 相乘即可.

【解答】

解: 分三步, 第一步在 6 个人中选取 2 个去第一个学校, 有 C_6^2 种方法, 第二步在剩下的四个人中选取 2 个人去第二个学校, 有 C_4^2 种方法, 第三步剩下的 2 个人去第三个学校, 有 C_2^2 种方法, 所以总共方法数为 $C_6^2 C_4^2 C_2^2 = 90$ 种, 故答案为 90.

5. 已知 $A_n^4 = 24C_n^6$, 且 $(2x-3)^n = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \dots + a_n(x-1)^n$, 则 $n =$ _____, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n =$ _____.

10; 0

【解析】

解: $\because A_n^4 = 24C_n^6$, 即 $n(n-1)(n-2)(n-3) = 24 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6!}$,

$\therefore n = 10$.

$\therefore (2x-3)^n = (2x-3)^{10} = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \dots + a_n(x-1)^n$,

令 $x=1$, 可得 $a_0=1$; 令 $x=2$, 可得 $1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$, $\therefore a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 0$,

故答案为: 10; 0.

根据 $A_n^4 = 24C_n^6$, 求得 $n=10$, 可得 $(2x-3)^{10} = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \dots + a_n(x-1)^n$,

令 $x=1$, 可得 $a_0=1$; 令 $x=2$, 可得 $1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$, 从而求得

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ 的值.

6. 由 0,1,2,3,4 组成没有重复数字的五位数, 其中 1,2 必须相邻的五位偶数有_____个. (用数字作答)

【答案】24

①若末位数字为 0, 则 1,2 为一组, 且可以交换位置, 3,4 各为 1 个数字,

共可以组成 $2 \cdot A_3^3 = 12$ 个五位数;

②若末位数字为 2, 则 1 与它相邻, 其余 3 个数字排列, 且 0 不是首位数字,

则有 $2 \cdot A_2^2 = 4$ 个五位数;

③若末位数字为4, 则1,2为一组, 且可以交换位置, 3,0各为1个数字, 且0不是首位数字,

则有 $2 \cdot (2 \cdot A_2^2) = 8$ 个五位数,

$\therefore$ 全部合理的五位数共有 24 个.

7. 用 5 种不同颜色给如表中的 4 个区域涂色, 每个区域涂 1 种颜色, 相邻区域不能同色, 求不同的涂色方法共有_____种?

1	4
2	
3	

1, 3 不同色, 则有 $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ 种涂法 (按 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ 的顺序涂);

1, 3 同色, 则有 $5 \times 4 \times 1 \times 3 = 60$ 种涂法 (顺序同上).

故共有 180 种涂法.

8. 从 $n+1$ ($n \in N^*$) 个不同小球 (其中 n 个白球, 1 个黑球) 中取出 m ($m \in N^*$, 且 $n \geq m$) 个球共有 C_{n+1}^m 种不同取法, 还可换一个角度考虑: 若取出 m 个球全是白球, 则有 C_n^m 种不同取法, 若取出 m 个球中含有黑球, 则有 C_n^{m-1} 种不同取法, 从而共有 $C_n^m + C_n^{m-1}$ 种不同取法. 因此, 可以得到组合恒等式: $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$. 请你运用类比推理的方法, 可以得到排列恒等式:

$A_{n+1}^m = A_n^m + \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 mA_n^{m-1}

9. 从 5 名男生和 4 名女生中选出 4 人去参加座谈会, 问:

(I) 如果 4 人中男生和女生各选 2 人, 有多少种选法?

(II) 如果男生中的甲与女生中的乙至少要有 1 人在内, 有多少种选法?

(III) 如果 4 人中必须既有男生又有女生, 有多少种选法?

解: (I) 根据题意, 从 5 名男生中选出 2 人, 有 $C_5^2=10$ 种选法,

从 4 名女生中选出 2 人, 有 $C_4^2=6$ 种选法,

则 4 人中男生和女生各选 2 人的选法有 $10 \times 6=60$ 种;

(II) 先在 9 人中任选 4 人, 有 $C_9^4=126$ 种选法,

其中甲乙都没有入选, 即从其他 7 人中任选 4 人的选法有 $C_7^4=35$ 种,

则甲与女生中的乙至少要有 1 人在内的选法有 $126-35=91$ 种;

(III) 先在 9 人中任选 4 人, 有 $C_9^4=126$ 种选法,

其中只有男生的选法有 $C_5^4=5$ 种, 只有女生的选法有 $C_4^4=1$ 种,

则 4 人中必须既有男生又有女生的选法有 $126-5-1=120$ 种.

10. 设 $(1+\frac{1}{2}x)^m = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_mx^m$, 若 a_0, a_1, a_2 成等差数列.

(1) 求 $(1+\frac{1}{2}x)^m$ 展开式的中间项;

(2) 求 $(1+\frac{1}{2}x)^m$ 展开式中所有含 x 奇次幂的系数和;

(3) 求 $(1+\frac{1}{2}x)^{m+6}$ 展开式中系数最大项.

解: (1) 依题意得 $T_{r+1} = C_m^r (\frac{1}{2})^r x^r$, $r=0, 1, \dots, m$.

则 $a_0=1$, $a_1 = \frac{m}{2}$, $a_2 = C_m^2 (\frac{1}{2})^2$,

由 $2a_1=a_0+a_2$ 得 $m^2-9m+8=0$ 可得 $m=1$ (舍去), 或 $m=8$,

所以 $(1+\frac{1}{2}x)^m$ 展开式的中间项是第五项为: $T_5 = C_8^4 (\frac{1}{2})^4 = \frac{35}{8} x^4$;

(2) $(1+\frac{1}{2}x)^m = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_mx^m$,

即 $(1+\frac{1}{2}x)^8 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_8x^8$.

令 $x=1$ 则 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8 = (\frac{3}{2})^8$,

令 $x=-1$ 则 $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_8 = (\frac{1}{2})^8$,

所以 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = \frac{3^8-1}{2^9} = \frac{205}{16}$, 所以展开式中含 x 的奇次幂的系数和为 $\frac{205}{16}$;

(3) 假设第 $r+1$ 项的系数为 $T_{r+1} = C_{14}^r (\frac{1}{2})^r$, 令 $\begin{cases} T_{r+1} \geq T_r \\ T_{r+1} \geq T_{r+2} \end{cases}$, 解得: $4 \leq r \leq 5$,

所以展开式中系数最大项为 $T_5 = \frac{1001}{16}x^4$ 和 $T_6 = \frac{1001}{16}x^5$.