江苏省仪征中学2020-2021学年度第二学期高二数学

周三练习6　　　　21.4.7

一．选择题（本大题共6小题，共30.0分）

1. 用0，1，2，3，4这5个数字组成没有重复数字的三位数，其中偶数共有（　　）

A．24个　　B．30个　　C．36个　　D．42个

2. 用0，1，2，3组成的没有重复数字全部四位数中，若按照从小到大的顺序排列，则第10个数应该是(　　)

A. 2103　　B. 2130　　C. 2301　　D. 2310

3.从5种主料中选2种，8种辅料中选3种来烹饪一道菜，烹饪方式有5种，那么最多可以烹饪出不同的菜的种数为(　　)

A．18　　B．200　　C．2800　　D．33600

4．影片《红海行动》里的“蛟龙突击队”在奉命执行撤侨过程中，海军舰长要求队员们依次完成6项任务，并对任务的顺序提出了如下要求：重点任务A必须排在第2位，且任务E、F必须排在一起，则这6项任务的不同安排方案共有(　　)

A．18种　　B．36种　　C．144种　　D．216种

5．设$f(x)$（$x\in\mathbf{R}$）是奇函数，$f'(x)$是$f(x)$的导函数，$f(-2)=0$．当$x>0$时，$xf'(x)-f(x)>0$，则使得$f(x)>0$成立的x的取值范围是（　　）

A．$(-2，0)\cup(0，2)$　　B．$(-\infty，-2)\cup(2，+\infty)$

C．$(-\infty，-2)\cup(0，2)$　　D．$(-2，0)\cup(2，+\infty)$

6. 若函数$f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+\frac{1}{3}a^2$恰有两个零点，则$f\left(x\right)$在$\left[-3,3\right]$上的最小值为（　　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$-\frac{50}{3}$　　C．2　　D．$\frac{8}{3}$

二．不定项选择题（本大题共2小题，共10分）

7. 已知不等式$\left(x-2\right)e^x\geq a$对任意的$x\in\mathbf{R}$恒成立，则满足条件的整数$a$的可能值为（　　）

A．-4　　B．-3　　C．-2　　D．-1

8．对于三次函数$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq0)$，给出定义：设$f'(x)$是函数$y=f(x)$的导数，$f''(x)$是$f'(x)$的导数，若方程$f''(x)=0$有实数解x_0，则称点$(x_0，f(x_0))$为函数$y=f(x)$的“拐点”．探究发现：任何一个三次函数都有“拐点”；任何一个三次函数都有对称中心，且“拐点”就是对称中心，设函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{13}{12}$，则以下说法正确的是

A．函数$f(x)$对称中心$(\frac{1}{2}，0)$　B．$f(\frac{1}{100})+f(\frac{2}{100})+\cdots+f(\frac{98}{100})+f(\frac{99}{100})$的值是99

C．函数$f(x)$对称中心$(\frac{1}{2}，1)$　D．$f(\frac{1}{100})+f(\frac{2}{100})+\cdots+f(\frac{98}{100})+f(\frac{99}{100})$的值是1

三、填空题（本大题共 4 小题，共 10.0 分）

9. 若函数$f(x)=\frac{3}{x}+ln\,x$在区间$(m,m+2)$上是单调减函数，则实数m的取值范围是 ______ .

10. 有甲、乙、丙、丁、戊 5 名同学站成一排，要求甲、乙必须相邻，丙、丁不能相邻，有______种不同的站法.

11．2020 年初，湖北成为全国新冠疫情最严重的省份，面临医务人员不足和医疗物资紧缺等诸多困难，全国人民心系湖北，志愿者纷纷驰援．若将 4 名医生志愿者分配到两家医院（每人去一家医院，每家医院至少去 1 人），则共有______种分配方案．

12. 函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x+2m-1(x\le 0)\\ x+3m-6(x>0)\end{cases}$ ，若函数 $f\left(x\right)$ 有四个不同零点，则实数 m 范围为___.

四、解答题（本大题共 2 小题，共 36.0 分）

13. 在① $f(x)$ 有一个极值点是 $x=1$，② $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，$g(x)=3f(x)+f'(x)-2$ 是奇函数，③曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线与直线 $y=x$ 垂直，这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并解答． 问题：已知函数 $f(x)=x^3-x^2+ax+1$，且__________，当 $x\in[-1,2]$ 时，求 $f(x)$ 的值域.

注：如果选择多个条件解答，按第一个解答计分.

14. 已知圆方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$，从 0，3，4，5，6，7，8，9，10 这九个数中选出 3 个不同的数，分别作圆心的横坐标、纵坐标和圆的半径，请解决下列问题：

（1）可以作多少个不同的圆？

（2）经过原点的圆有多少个？

（3）圆心在直线 $x+y-10=0$ 上的圆有多少个？

江苏省仪征中学 2020-2021 学年度第二学期高二数学

周三练习 6

21.4.7

一．选择题（本大题共 6 小题，共 30.0 分）

1. 用 0，1，2，3，4 这 5 个数字组成没有重复数字的三位数，其中偶数共有（　　）

A．24 个　　　　B．30 个　　　　C．36 个　　　　D．42 个

【解答】解：由题意知本题是一个分类计数原理，

在所给的数字中，0 是一个比较特殊的数字，0 在末位和 0 不在末位结果不同，

末位是 0 时，十位和百位从 4 个元素中选两个进行排列有 $A_4^2=12$ 种结果，

当末位不是 0 时，只能从 2 和 4 中选一个，百位从 3 个元素中选一个，十位从三个中选一个共有 $A_2^1A_3^1A_3^1$ $=18$ 种结果，

根据分类计数原理知共有 12+18＝30 种结果，

故选：B.

2. 用 0，1，2，3 组成的没有重复数字的全部四位数中，若按照从小到大的顺序排列，则第 10 个数应该是（　　）

A. 2103　　　　B. 2130　　　　C. 2301　　　　D. 2310

【详解】解：根据题意，用 0，1，2，3 组成的没有重复数字的全部四位数，

若 1 作为千位数字，将 0、2、3 全排列，安排在百、十、个位，有 $A_3^3=6$ 种情况，

1 作为千位数字的没有重复数字的四位数有 6 个，

同理：2 作为千位数字的四位数有 $A_3^3=6$ 个，

其中最大的为 2310，其次为 2301，则第 10 个数应该是 2130；

故选：B .

3.从 5 种主料中选 2 种，8 种辅料中选 3 种来烹饪一道菜，烹饪方式有 5 种，那么最多可以烹饪出不同的菜的种数为

A．18　　B．200　　C．2800　　D．33600

3、答案：C

4．影片《红海行动》里的“蛟龙突击队”在奉命执行撤侨过程中，海军舰长要求队员们依次完成 6 项任务，并对任务的顺序提出了如下要求：重点任务 A 必须排在第 2 位，且任务 E、F 必须排在一起，则这 6 项任务的不同安排方案共有

A．18 种　　B．36 种　　C．144 种　　D．216 种

4．B

5．设 $f(x)$（$x\in\mathbf{R}$）是奇函数，$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，$f(-2)=0$．当 $x>0$ 时，$xf'(x)-f(x)>0$，则使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是（　　）

A．$(-2,0)\cup(0,2)$　　　　B．$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

C．$(-\infty,-2)\cup(0,2)$　　　　D．$(-2,0)\cup(2,+\infty)$

【解答】解：设 $g(x)=f(x)x$，则 $g(x)$ 的导数为：

$g'(x)=xf'(x)-f(x)x2$，

∵当 $x>0$ 时总有 $xf'(x)-f(x)>0$ 成立，

即当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，

∴当 $x>0$ 时，函数 $g(x)$ 为增函数，

又∵$g(-x)=f(-x)-x=-f(x)-x=f(x)x=g(x)$，

∴函数 $g(x)$ 为定义域上的偶函数，

∴$x<0$ 时，函数 $g(x)$ 是减函数，

又∵$g(-2)=f(-2)-2=0=g(2)$，

∴$x>0$ 时，由 $f(x)>0$，得：$g(x)>g(2)$，解得：$x>2$，

$x<0$ 时，由 $f(x)>0$，得：$g(x)<g(-2)$，解得：$-2<x<0$，

∴$f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是：$(-2,0)\cup(2,+\infty)$，

故选：D．

6．若函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+\frac{1}{3}a^2$ 恰有两个零点，则 $f(x)$ 在 $[-3,3]$ 上的最小值为（　　）

A． $\frac{2}{3}$　B．$-\frac{50}{3}$　　C．2　D．$\frac{8}{3}$

答案 B

二、不定项选择题（本大题共 2 小题，共 10 分）

7．已知不等式 $(x-2)e^x\ge a$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则满足条件的整数 a 的可能值为（　　）

A．-4　　B．-3　　C．-2　　D．-1

9【答案】AB

【分析】

利用导数求得函数 $f(x)=(x-2)e^x$ 的最小值，可得出实数 a 的取值范围，由此可得出合适的选项.

【详解】令 $f(x)=(x-2)e^x$，则 $a\le f(x)_{\min}$.

$f'(x)=(x-1)e^x$，当 $x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$.

所以，函数 $y=f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,1)$，单调递增区间为 $(1,+\infty)$，

$\therefore f(x)_{\min}=f(1)=-e$，$\therefore a\le -e$.

因此，满足条件的整数 a 的可能值为 -4、-3.

故选：AB.

8．对于三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$，给出定义：设 $f'(x)$ 是函数 $y=f(x)$ 的导数，$f''(x)$ 是 $f'(x)$ 的导数，若方程 $f''(x)=0$ 有实数解 x_0，则称点(x_0，$f(x_0)$)为函数 $y=f(x)$ 的“拐点”．探究发现：任何一个三次函数都有“拐点”；任何一个三次函数都有对称中心，且“拐点”就是对称中心，设函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{13}{12}$，则以下说法正确的是

A．函数 $f(x)$ 对称中心($\frac{1}{2}$，0)

B．$f(\frac{1}{100})+f(\frac{2}{100})+\cdots+f(\frac{98}{100})+f(\frac{99}{100})$ 的值是 99

C．函数 $f(x)$ 对称中心($\frac{1}{2}$，1)

D．$f(\frac{1}{100})+f(\frac{2}{100})+\cdots+f(\frac{98}{100})+f(\frac{99}{100})$ 的值是 1

8．BC

三、填空题（本大题共 4 小题，共 10.0 分）

9. 若函数$f(x)=\frac{3}{x}+\ln x$在区间$(m,m+2)$上是单调减函数，则实数 m 的取值范围是________

【详解】函数 $f(x)=\frac{3}{x}+lnx$ **在区间** $(m,m+2)$ **上是单调减函数，**$\therefore m\geqslant 0$.

且 $f'(x)=-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-3}{x^2}\leqslant 0$，**令** $f'(x)\leqslant 0$，**解得：**$x\leqslant 3$.

$\therefore \begin{cases}0\leqslant m\\ m+2\leqslant 3\end{cases}$，**解得** $0\leqslant m\leqslant 1$．$\therefore$ **实数** m **的取值范围是** $[0，1]$.

10. 有甲、乙、丙、丁、戊 5 名同学站成一排，要求甲、乙必须相邻，丙、丁不能相邻，有______种不同的站法.

【答案】24

【解析】5 名同学站成一排，要求甲、乙必须相邻，丙、丁不能相邻，故有 $A_2^2A_2^2A_3^2=24$（种）不同的方法.

11．2020 年初，湖北成为全国新冠疫情最严重的省份，面临医务人员不足和医疗物资紧缺等诸多困难，全国人民心系湖北，志愿者纷纷驰援．若将 4 名医生志愿者分配到两家医院（每人去一家医院，每家医院至少去 1 人），则共有 14 种分配方案．

【解答】解：根据题意，将 4 名医生志愿者分配到两家医院，每人去一家医院，每人有 2 种选法，

则 4 人有 2×2×2×2＝2^4＝16 种情况，

其中 4 人同去一个医院的情况有 2 种，则每人去一家医院，每家医院至少去 1 人的安排方法有 16﹣2＝14 种；

故答案为：14

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{3}{2}x^2+2x+2m-1(x\le 0)\\ x+3m-6(x>0)\end{cases}$ ，若函数 $f(x)$ 有四个不同的零点，则 m 的取值范围为______

10. $(\frac{5}{6},\frac{11}{12})$

【分析】先利用导数求出 $x\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调性及极值，再结合题意，建立关于 m 的不等式组，解不等式组即可得出答案．

【详解】当 $x\leqslant 0$ 时， $f'(x)=x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ ，

故函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ ， $(-1,0)$ 单调递增，在 $(-2,-1)$ 单调递减，

$\therefore$ 当 $x\leqslant 0$ 时， $f(x)_{极大值}=f(-2)=2m-\frac{5}{3}$ ， $f(x)_{极小值}=f(-1)=2m-\frac{11}{6}$ ， $f(0)=2m-1$ ，

由于 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x+2m-1$ 最多有 3 个零点， $f(x)=x+3m-6$ 最多只有一个零点，故要使函数 $f(x)$ 有四个不同的零点，

则需 $\begin{cases}2m-\dfrac{5}{3}>0\\ 2m-\dfrac{11}{6}<0\\ 2m-1>0\\ 3m-6<0\end{cases}$ ，解得 $\frac{5}{6}<m<\frac{11}{12}$ ．故答案为： $(\frac{5}{6},\frac{11}{12})$ ．

四、解答题（本大题共 2 小题，共 36.0 分）

13. （**本题满分 12 分**）在① $f(x)$ 有一个极值点是 $x=1$，② $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，$g(x)=3f(x)+f'(x)-2$ 是奇函数，③曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线与直线 $y=x$ 垂直,这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并解答.

问题：已知函数 $f(x)=x^3-x^2+ax+1$，且__________，当 $x\in[-1,2]$ 时，求 $f(x)$ 的值域.

注：如果选择多个条件解答，按第一个解答计分.

18 解：选择①，因为 $f'(x)=3x^2-2x+a$，

所以 $f'(1)=1+a=0$，解得 $a=-1$， $f(x)=x^3-x^2-x+1$，

则 $f'(x)=3x^2-2x-1=(x-1)(3x+1)$，令 $f'(x)=0$，得 $x=-\dfrac{1}{3}$ 或 $x=1$.

当 $x\in\left(-\dfrac{1}{3},1\right)$ 时， $f'(x)<0$；当 $x\in\left(-1,-\dfrac{1}{3}\right)\cup(1,2)$ 时， $f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $\left[-1,-\dfrac{1}{3}\right)$ 和（1.2]上单调递增，在 $\left(-\dfrac{1}{3},1\right)$ 上单调递减,

又 $f(-1)=0$， $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{32}{27}$， $f(1)=0$， $f(2)=3$，

所以当 $x\in[-1,2]$ 时. $f(x)$ 的值域为 $[0,3]$.

选择②， $g(x)=3f(x)+f'(x)-2=3x^3+(3a-2)x+1+a$，

因カ $g(x)=3x^3+(3a-2)x+1+a$ 为奇函数，所以 $g(0)=1+a=0$，解得 $a=-1$， $f(x)=x^3-x^2-x+1$.

则 $f'(x)=3x^2-2x-1=(x-1)(3x+1)$，令 $f'(x)=0$，得 $x=-\dfrac{1}{3}$ 或 $x=1$.

当 $x\in\left(-\dfrac{1}{3},1\right)$ 时， $f'(x)<0$；当 $x\in\left(-1,-\dfrac{1}{3}\right)\cup(1,2)$ 时， $f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $\left[-1,-\dfrac{1}{3}\right)$ 和 $(1,2]$ 上单调递增，在 $\left(-\dfrac{1}{3},1\right)$ 上单调递减,

又 $f(-1)=0$， $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{32}{27}$， $f(1)=0$， $f(2)=3$，

所以当 $x\in[-1,2]$ 时， $f(x)$ 的值域为 $[0,3]$.

选择③，因为 $f'(x)=3x^2-2x+a$，

所以 $f'(0)=-1$，解得 $a=-1$， $f(x)=x^3-x^2-x+1$，

则 $f'(x)=3x^2-2x-1=(x-1)(3x+1)$，令 $f'(x)=0$，得 $x=-\frac{1}{3}$ 或 $x=1$.

当 $x\in\left(-\frac{1}{3},1\right)$ 时， $f'(x)<0$；当 $x\in\left(-1,-\frac{1}{3}\right)\cup(1,2)$ 时， $f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $\left[-1,-\frac{1}{3}\right)$ 和 $(1,2]$ 上单调递增，在 $\left(-\frac{1}{3},1\right)$ 上单调递减，

又 $f(-1)=0$， $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{32}{27}$， $f(1)=0$， $f(2)=3$，

所以当 $x\in[-1,2]$ 时， $f(x)$ 的值域为 $[0,3]$.

14.（本小题满分 12 分）

已知圆方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$，从 0，3，4，5，6，7，8，9，10 这九个数中选出 3 个不同的数，分别作圆心的横坐标、纵坐标和圆的半径，请解决下列问题：

（1）可以作多少个不同的圆？

（2）经过原点的圆有多少个？

（3）圆心在直线 $x+y-10=0$ 上的圆有多少个？

解：（1）可分两步完成：第一步，先选 r，因 $r>0$，则 r 有 A_8^1 种选法，第二步再选 a，b，在剩余8个数中任取2个，有 A_8^2 种选法，

所以由分步计数原理可得有 A_8^1．$A_8^2=448$ 个不同的圆，，

（2）圆（$x-a$）^{2}+（$y-b$）$^2=r^2$ 经过原点，a、b、r 满足 $a^2+b^2=r^2$，

满足该条件的 a，b，r 共有3，4，5与6，8，10两组，考虑 a、b 的顺序，有 A_2^2 种情况，

所以符合题意的圆有 $2A_2^2=4$，

（3）圆心在直线 $x+y-10=0$ 上，即满足 $a+b=10$，则满足条件的 a、b 有三组：0，10；3，7；4，6．

当 a、b 取10、0时，r 有7种情况，

当 a、b 取3、7；4、6时，r 不可取0，有6种情况，

考虑 a、b 的顺序，有 A_2^2 种情况，

所以满足题意的圆共有 A_2^2．$A_7^1+2A_2^2A_6^1=38$ 个