HPM 视角下的正切概念教学①

潘金城

（扬中市外国语中学　212200）

1　引言

“正切”是初中数学课程中的重要概念.苏科版九年级(下册)数学教科书中,首先创设“底等高不等、高等底不等”三种不同类型的台阶的情境,判断哪个台阶最陡?然后运用相似三角形的知识证明“如果直角三角形的一个锐角的大小确定,那么这个锐角的对边与邻边的比值也确定”.在此基础上给出了锐角$\angle A$的正切概念:在$\text{Rt}\triangle ABC$中,$\angle C=90°$,把$\angle A$的对边与邻边的比叫做$\angle A$的正切(tangent),记作$\tan A$.

对于初中生来说,从“线段长”到“线段比”是认识上的一次飞跃.研究表明,学生在正切概念的理解上存在认知困难.教科书上的情境让学生直接面对把“线段比”作为研究对象,似乎还不符合他们的认知基础,也未必能凸显引进正切概念的必要性.那么,应该如何引入正切概念,既符合学生的认知基础,又能有效地激发学生的学习动机?事实上,学生在学习“正切”概念之前,已经研究了直角三角形中两锐角之间、边边之间的关系,研究边角关系成为学习新知的必要性.而从历史上看,早期天文学家将“影长”作为正切,17 世纪数学家将圆的切线长定义为正切,在三角形教科书中,直到 19 世纪 20 年代才出现“线段比”定义.因此,“正切”概念的演进过程,自然成了教学设计的指南.这是我们选择 HPM 视角来设计“正切概念”教学的缘由.

本节课的教学目标是:(1)理解正切函数的概念,会在直角三角形中求出某一个锐角的正切值,能用正切知识解决较为简单的实际问题;(2)经历正切概念的演进过程,感悟数学背后的人文精神,拉近与天文学家、数学家之间距离,增强数学学习的信心.

2　有关正切概念的史料及其运用

2.1　关于正切概念的历史演进

三角函数概念有着悠久的而历史,正切概念经历了以下演进过程[1].

第一阶段:古代阿拉伯天文学家用“横影”和“纵影”表示今天的“余切”和“正切”(如图 1),“余切”和“正切”都是线段的长.实际上,16 世纪以前,三角函数都是线段,到 16 世纪以后才出现用比值来表示三角函数.而在三角学教科书中,线段定义一直延续到 19 世纪.

第二阶段:在直角三角形(如图 2)中,将$\dfrac{BC}{AC}$的值定义为$\angle A$的正切,记为$\tan A$,线段比取代了线段.该定义出现在瑞士—美国数学家哈斯勒(F. R. Hassler)的《解析几何基础》(1826)中.

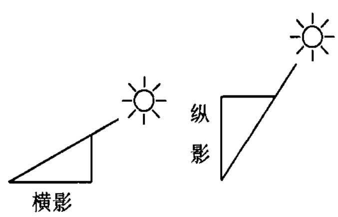


图 1

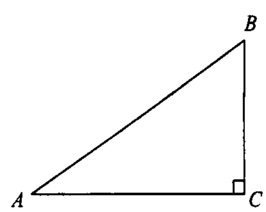


图 2

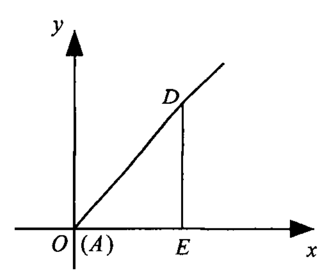


图 3

① 本文是江苏省十三五规划课题:“基于核心素养的‘GBR’课程建设的研究”阶段性研究成果.

第三阶段:终边定义.将锐角置于直角坐标系的第一象限,在角的终边上任意取一点 $D(m,n)$(如图 3),则$\angle A$ 的正切定义为$\frac{DE}{AE}=\frac{n}{m}$,该定义最早出现在科伦索(J. W. Colenso)的《平面解析几何》(1859)中.

第四阶段:将三角比视为角的函数."三角函数"之名出现于美国数学家威尔斯(W. Wells)的《平面与球面三角学精要》(1887)中".

另外,测量地球、太阳、月亮两两之间的距离是古代天文学家孜孜以求的问题.公元前 3 世纪,阿里斯塔克斯(Aristarchus)在月亮半圆的时刻,测得日、地、月的中心 S、E 和 M 恰为一个直角三角形的三个顶点(如图 4),且$\angle ESM=3°$.问题是:地球到太阳的距离是地球到月亮距离的几倍?

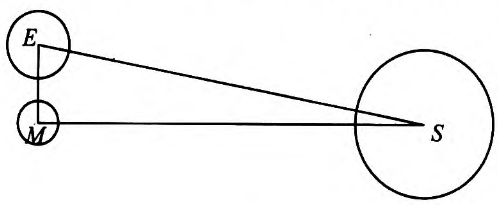


图 4

综上可见,从三角函数的历史上看,天文学上的应用是产生三角函数的缘由,从线段到线段比、再到三角函数的演进过程中,人们经历了"启蒙阶段→发展阶段→深化阶段"的艰辛探索,基于 HPM 视角下的正切概念教学正是为学生学习提供历史线索,同时也顺应学生认知规律、顺应知识生长规律,让学生在探索新知的过程中汲取数学素养.

2.2 数学史料的运用

我们采用多种方式融入数学史(如表 1),借鉴"正切概念"的演进历史,追溯其思想起源,呈现知识自然发生过程,激发学生的学习动机,促进学生对"正切概念"本质的理解和应用,在过程的抽象与结论的猜想证明中培养学生"数学抽象""逻辑推理"素养,在情境的起承转合中培养学生"直观想象""数学建模"素养.

表 1 数学史在本节课中的运用

序号	数学史料	教学运用	运用方式	教学环节
1	"横影"与"纵影"定义正切	古代人们所使用的计时工具——日晷	复制式	引入新课
2	线段比表示正切	根据楼梯的高与底长判断楼梯的陡缓程度	重构式	探究新知
3	基于坐标系的终边定义正切	运用相似三角形证明"角定比定"	顺应式	探究新知
4	正切函数概念的形成	几何画板动态演示,让学生感受符号引进的必要性	重构式	探究新知
5	阿里斯塔克斯问题	月亮到太阳的距离是地球到月亮距离的几倍?	顺应式	巩固应用

3 教学设计与实施

3.1 课堂引入

师:同学们,现在计时的工具很多,如手表、手机等,而古代人们计时的工具是"日晷",每天正午时分"晷影"的长度也是变化的,冬至那天的"晷影"是一年中最长的,夏至那天的"晷影"是一年中最短的.请同学们观察每日正午时分"晷影"长度的变化过程(动画展示,图 5).在这个变化过程中,哪些是常量与变量?

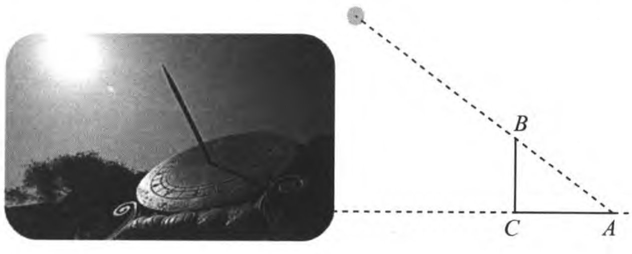


图 5

生:常量有晷针 BC 的长,$\angle C$ 的大小;变量有$\angle A$ 和$\angle B$ 的大小,AB 和 AC 的长.

师:两变量之间有何关系?

生:$\angle A+\angle B=90°$;$AC^2=AB^2-BC^2$;

生:虽然我不能用数学式子表示变量角和边之间的关系,但我发现$\angle A$ 越大 AC 越短,$\angle A$ 越小 AC 越长;$\angle B$ 越大 AC 越长,$\angle B$ 越小 AC

越短.

生:我还发现$\angle A$越大AB越短,$\angle A$越小AB越长;

……

师:在直角三角形中,我们知道两锐角之间可以构成函数关系,AC、AB之间也构成了函数关系.请同学们根据函数概念,当BC确定时,AC与$\angle A(\angle B)$、AB与$\angle A(\angle B)$能否也构成函数呢?

生:【思考片刻】发现它们之间也能构成函数!

师:这是我们本章将要学习的锐角三角函数.(板书课题)

设计意图 "日晷"是古代计时的工具,其原理就是"晷影"长度与时间的对应关系,而长度又与太阳的入射角的大小有关.数学史料的引进不仅从外部激发了学生兴趣和感受到数学文化,而且从内部领悟到影长与角的大小之间建立了某种函数关系.我们对数学史料采用"复制式"创设情境,既顺应历史发展规律和学生认知规律,又为探索"正切概念"提供"脚手架".

3.2 概念生成

师:我们已经感知到:当BC确定时,AC与锐角$\angle A$可构成函数关系;若当BC和AC变化时,则它们与$\angle A$有何关系?我们一起来探究这个问题.

活动 1 观察图 6 中哪个台阶更陡?你是怎么判断的?

生:右边的那个台阶更陡点,因为楼梯的坡角更大.

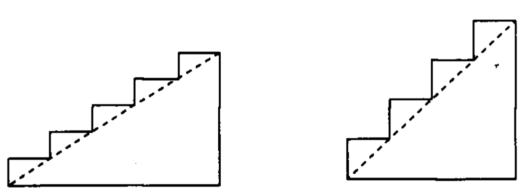
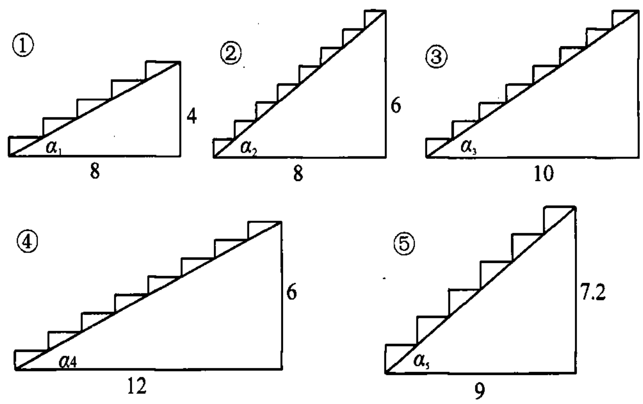


图 6

师:请同学们根据所提供的活动单,通过独立思考、小组合作的方式进行探究:

活动 2 观察下面 5 个台阶,根据所给的数据,你能比较它们坡角的大小吗?(小组合作,给出结论,并说明判断理由)



学生展示交流

生:台阶①和②的底宽相等,台阶①比②的高度低,若将底重合,则$\angle\alpha_1$落在$\angle\alpha_2$的内部,故$\alpha_1<\alpha_2$.由此可见,底宽相等时,高度越大坡角越大.

生:台阶②、③和④高度相同时,台阶②的底宽最短、④的底宽最长,若将高重合,则不难发现$\alpha_4<\alpha_3<\alpha_2$.所以高度相同时,水平宽度越短,坡角越大.

生:我将台阶①和③分别适当"放大",使得它们的高都变为 12,则①的宽变为 24,③的宽变为 20,所以$\alpha_1<\alpha_3$.

生:我将台阶①和③分别适当"缩小",使得它们的高都变为 1,则①的宽变为 2,③的宽变为$\frac{5}{3}<2$,所以$\alpha_1<\alpha_3$.

生:我将台阶②中的高扩大为 1.2 倍,台阶②大小不变,则②的底宽变为$9.6>9$,所以$\alpha_2<\alpha_5$,结合前面同学的发现,可得$\alpha_4<\alpha_3<\alpha_2<\alpha_5$.

师:刚才几位同学通过对图形适当的"放大"或"缩小",化高不等为相等,从而比较出台阶②③④⑤的大小,但台阶①④的坡角大小有什么关系?

生:虽然台阶①④的高度不等,宽度也不等,但将它们适当"放大",使得它们的高都变为 12,不难看出它们底宽变得也相等,故$\alpha_1=\alpha_4$.

生:我们将图形"放大"或"缩小",其实质就是"相似".因为台阶①④的高度与宽度的比相等,它们的坡角所在两个直角三角形相似.

师:如何比较楼梯的坡角大小,同学们还有什么发现?

生:我发现:当高度与宽度的比不等时,底宽与高的差的绝对值越小,坡角越大.

生:这个结论不对,比如在台阶①和③中,宽与高的差的绝对值相等,但 $\alpha_1<\alpha_3$.

生:如果把这5个阶梯的底都变为1,它们的高分别为0.5,0.75,0.6,0.5,0.8,不难发现坡角大小关系.

生:我发现底宽与高的比值越大,坡角越大;因为 $\frac{6}{12}<\frac{6}{10}<\frac{6}{8}<\frac{7.2}{9}$,所以有 $\alpha_4<\alpha_3<\alpha_2<\alpha_5$,底宽与高的比值相等,则坡角相等.

师:通过大家的讨论,我们可以得到猜想:在直角三角形中,锐角与两直角边比值之间存在着对应关系.

设计意图 从数学的历史看,"线段长"到"线段比"表示正切经历了数百年时间,充分说明人们对"线段比"表示正切要跨越认知上的巨大障碍.对学生而言,如果教师继续以"晷影"为情境研究"正切概念",那么就很难发现用"线段比"表示正切.为顺应历史发展规律发现"线段比",采用"重构式"创设"研究楼梯坡度陡缓程度"的情境,让"线段比"来的自然,突破认知困难.

师:如果将楼梯的坡角抽象为"角"的模型,请同学们思考以下问题:

问题1 当 $\angle A$ 大小确定时,则 $BC:AC=B_1C_1:AC_1=B_2C_2:AC_2=\cdots$ 成立吗?(如图7)

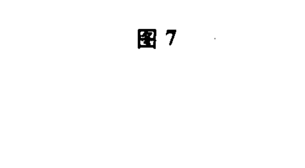


图7

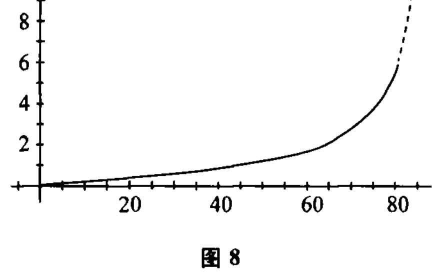


图8

生:因为 $\triangle AB_1C_1\backsim\triangle AB_2C_2\backsim\triangle ABC$,所以 $BC:AC=B_1C_1:AC_1=B_2C_2:AC_2$.

师:我们不难看出:当 BC 和 AC 变化时,$\angle A$ 的大小只与它们的比有关,与它们的长无关.

问题2 当 $\angle A$ 变化时,上面的等式仍成立吗?

生:成立!但当 $\angle A$ 变化时,上面等式的值也随之变化.

师:同学们回答得很漂亮!用几何画板演示(如图8).通过你们的自主探索可以归纳出:如果一个直角三角形的一个锐角的大小确定,你们这个锐角的对边与这个角的邻边的比值要求确定.而这个比值反映了斜边相对于这角的邻边的倾斜程度,它与这个锐角的大小有着密切关系.正是这种对应关系建立了 $\angle A$ 的对边、邻边的比值和 $\angle A$ 大小之间的函数关系.

师:这种函数关系怎样表示呢?请同学们观察它们之间关系的函数图像.(图8)它能用我们所熟悉的一次函数、反比例函数和二次函数的模型刻画吗?

生:【观察片刻】不能!

师:因此我们有必要引进符号表示它们之间的关系,把 $\angle A$ 的对边与它邻边的比称为 $\angle A$ 的正切,记作 $\tan A$,即 $\tan A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\angle A\text{ 的邻边}}=\frac{b}{a}$.

设计意图 文献[1]考察了19世纪的49种三角学教科书中,在直角三角形中定义三角函数的有3种,基于直角坐标系的终边定义三角函数的有24种.利用相似三角形性质,对所定义的各三角函数只与角的终边有关,而与终边上点的位置无边.这段史料的研究,充分说明教师在教学中要凸显"相似三角形性质"在研究正切概念中的作用,而不能仅仅告诉学生正切就是一个锐角所对的直角边与斜边的比.

从"线段比"定义正切到"函数观点"认识正切、用符号表示正切又经历了几十年的时间,对学生而言又要经过一次认知上的飞跃.为此,我们采用"重构式"增设"图像"认识函数的环节,发现与已有的"一次函数""二次函数"和"反比例函数"的图像差别,感悟到引进新符号表示正切的必要性.至此,让学生经历了"正切概念"从"线段""线段比""角定比定"和"函数观点认识正切"的全过程.

3.3 理解与应用

公元前 3 世纪，古希腊天文学家阿里斯塔克斯在月亮半圆的时刻，测得日、地、月的中心 S，E 和 M 恰为一个直角三角形的三个顶点，且 $\angle ESM=3^\circ$（图 9）. 你能求出月亮到太阳的距离（MS）约为到地球距离（ME）的几倍吗？（写出你们的方案）

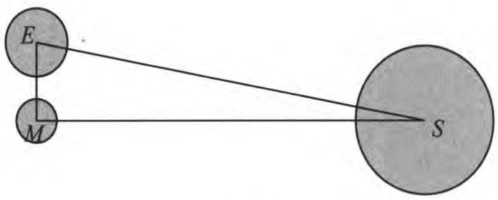


图 9

设计意图 该问题由阿里斯塔克斯问题改编而成，由于阿里斯塔克斯当时还不会计算角的正切，可能还不知正切与距离无关，他当时采用比较复杂的计算方法只得到一个估计值，也超出了现在初中生的认知范围. 本题的情境旨在激发学生的好奇心，深化对"正切概念"中"正切值大小只与角大小有关，与距离无关"的本质认识，让学生运用"化大为小"的策略解决问题.

3.4 收获与感悟

师：同学们，通过一节课的学习我们有怎样的收获，请大家从以下几方面小结：

（1）为什么要学习锐角三角函数？

（2）怎样研究正切？

（3）如何用正切知识解决问题？

（4）你还想继续知道什么？

请同学回顾所学知识与问题解决的方法，在独立思考的基础上与同伴交流！

生：我们已经知道古人研究正切与"影长"有关，直角三角形的两锐角关系、三边关系，学习锐角三角函数则揭示了边、角关系.

生：首先发现楼梯坡角的大小与高、宽之比的大小有对应关系，其次运用相似知识证明直角三角形的两直角边之比只与锐角大小有关，这个比值随着锐角大小的改变而改变，再次用数学符号表示了正切的定义.

生：用正切解决问题必须弄清：一个对象（直角三角形），两条边长（锐角的对边和邻边）或边长关系，一个公式（锐角的对边与邻边之比）.

生：我还想知道直角三角形中锐角大小所对的直角边与斜边之间的关系，邻边与斜边的关系.

生：我还想知道阿里斯塔克斯当时用数学方法如何求 $\tan 3^\circ$？

师：同学们小结比较全面，既有对知识、方法的归纳，又有对新问题研究的期待. 希望大家带着收获与问题离开课堂，养成独立思考和合作探究的习惯，让你爱上数学.

设计意图 学生通过这一节课的学习感受到正切概念的产生是一部"起承转合、艰辛探索"的历史，"正切概念"的研究与数学的发展紧紧同步. 从学生的"收获与感悟"中发现："正切"不是简单的两直角边的比，而是源于生活、高于生活，有着丰富内涵的数学知识.

4 数学核心素养生成路径分析

在本节课的教学设计与实施中，从教学环节看：顺应"正切概念"的数学发展历史；从数学内涵看：以"双基"为载体、"基本活动经验"为基础、"数学基本思想"为体现，蕴含了"数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象和数学运算"等核心素养；从教学行为看：体现了文[2]中所讲的"要实现基于核心素养培养的数学课堂转型，教师要在教学理念上从关注知识到关注能力和品格、从关注结果到关注过程以及关注输入到关注输出的转变"的目标.

数学核心素养是学生学习的数学关键能力和必备品格. 由本课例的实践与反思不难看出：基于数学史进行"过程化、情境化、自主化"的教学方式是培育学生的数学核心素养有效路径. 现分析如下.

4.1 "过程化"有利于自然生成数学核心素养

本课例中，"正切概念"的形成过程经历了三个阶段（如图 10），我们不难看出："正切概念"的三次抽象是数学从几何观念（线段）到代数观念（比值），再到对应观念（函数），最终抽象为符号（$\tan A$）的发展过程. 在此过程中，数学抽象核心素养的形成离开不了数学活动基本经验的积累，数学抽象的过程有利于学生进一步把握数学概念的本质属性.

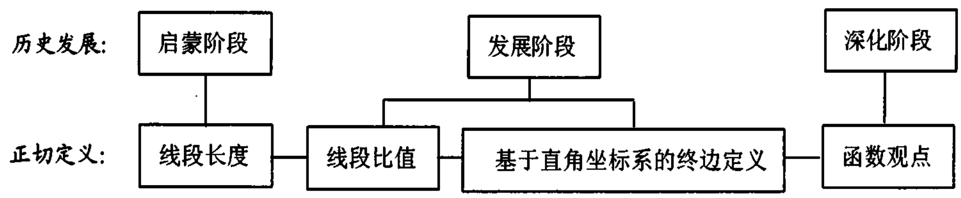


图 10

数学建模更是一个依赖过程的数学活动，文[3]指出：它是一个从现实世界抽象出数学问题，进入数学世界，再通过解决数学问题，最终回归现实世界的过程(如图 11). 在本课例的应用环节中，

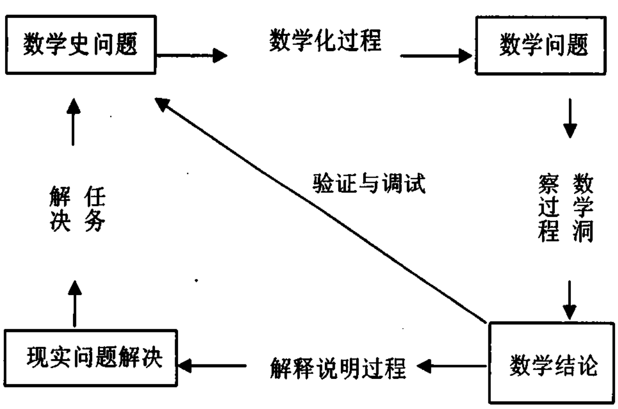


图 11

学生需要经历“化大为小造图形→运用性质求正切→回归现实作说明”等过程解决阿里斯塔克斯问题，培养学生用数学的眼光发现问题、数学的思维思考问题、数学的方法解决问题，将数学建模等核心素养融入其中.

4.2 “情境化”有利于融合发展数学核心素养

本课例是一个基于数学史料、顺应数学发展历史的教学设计(如图 12)，教学情境的产生源于对“史料”进行“复制、重构、顺应”，每一个情境将“数学史料、图形构建与数学思考”相融合，从而不难发展数学抽象、直观想象与逻辑推理等数学核心素养.

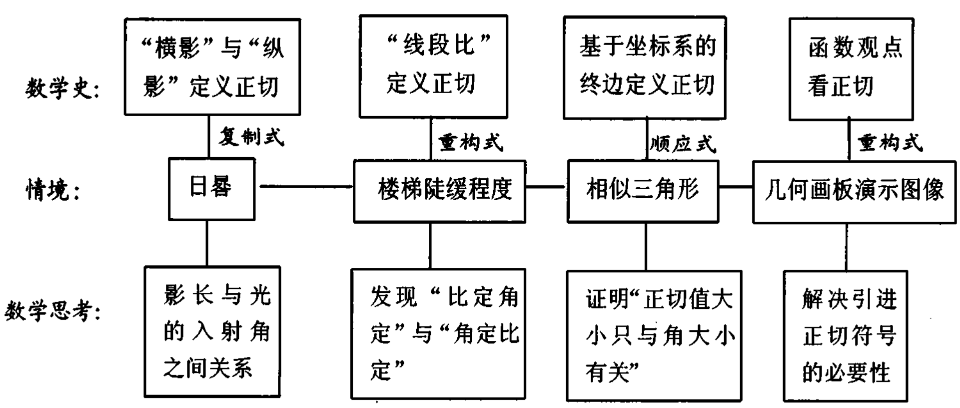


图 12

比如，为了引入用“线段比”定义正切，通过创设“楼梯陡缓程度”的问题情境，观察 5 个楼梯模型，先直观想象、再数学抽象、最后逻辑推理，几种素养融合其中. 再如，用“函数观点”认识正切的教学中，用几何画板绘制图像，将抽象的数学式子变为较直观的数学图像，通过图像的直观比较，不难感受到引进正切符号的必要性. 由此可见，直观化的情境有利于引导学生深度思考数与形的联系，从而让直观想象与数学推理有机融合.

4.3 “自主化”有利于形成良好的数学学习品质

数学核心素养的养成不仅要关注其成分，还要关注学生数学学习品质的培养. 认知建构主义原理认为：自主性学习是学生能够根据自己的学习能力、学习任务的要求，积极主动的调整自己的学习策略和努力程度的过程. “自主化”就是教师要充分尊重学生主体，善于“留白”，以激发学生的好奇心与求知欲，满足学生的需求，创设让学生“与教材发生对话、与同伴发生对话、与教师发生

对话、与实践发生对话、与自己发生对话”的时空.“自主化”的目标指向是培养学生学习的理性、信念、情感和品质.为此，我对所授课班级 45 名学生进行了问卷调查(见附表)，结果汇总如下：

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	40	38	42	45	40	43	39	40	41	10	39	41
B	5	7	2	0	3	1	4	3	3	5	4	3
C	0	0	1	0	2	1	2	2	1	30	2	1

(A—同意，B—不同意(不确定)，C—不同意)

由上表可知，本课例中借用日晷、阿里斯塔克斯问题等数学史料，激发学生好奇心，让其产生主动探究的欲望.在探究“正切概念”的教学中，教师通过师生、生生之间的“人际”对话和、与几何画板的“人机”对话，逐步对“正切概念”的有了整体化与深层次理解，学生自我“调控性”思维品质得以培养.

5　结语

数学课堂合理运用数学史料能够让学生了解数学的来龙去脉，激发并保持学生学习的好奇心与求知欲，对培养学生“提出问题、分析问题和解决问题”的能力和改善学生学习品质有着长久效益.基于数学史实施“过程化、情境化、自主化”教学是对数学历史的重构，更加注重学生的主动发现与探究，让数学课真正“教活、教懂、教深”(文[4])，实现弗莱登塔尔所倡导的“数学再创造”教学，从而更有效的培育学生数学核心素养.

附问卷

本问卷主要调查同学们在本节课中的学习内容、方式对你们学习品格方面有何影响？本调查只作改善教学之用，无关对错，不涉及个人隐私，希望大家诚实作答，在你认为符合你想法的选项中打“√”，谢谢配合！

品格分析	内　容	同意	不确定(无所谓)	不同意
理性	1. 正切概念的产生经历从线段到线段比表示的过程；			
	2. 有必要理解线段比与锐角大小之间构成函数关系；			
	3. 正切符号的引进有其必要性；			
信念	4. 正切的认识是人们不断演进的过程；			
	5. 正切概念的学习方式可以为认识新的三角函数提供帮助；			
	6. 我也能发现在日常生活中与正切相关的问题；			
情感	7. “日晷”中影长的变化激发我探究欲望；			
	8. “几何画板”的动态演示加深我对正切函数的认识；			
	9. “阿斯塔拉斯”问题调动了我学习兴趣；			
品质	10. 只要告知我正切概念就可以解题了；			
	11. 对“楼梯”陡缓程度的判定方法的获得我是经过反复思考的；			
	12. 我想知道古代人是怎样解决“阿里斯塔克斯”问题.			

参考文献

[1]汪晓勤. HPM:数学史与数学教育[M]. .北京：科学出版社，2017:109—114

[2]潘金城.基于核心素养的“反比例函数的图像”教学 [J]. 教育研究与评论，2017(9):85—88

[3]朱立明，胡洪强，马云鹏. 数学核心素养的理解与生成路径[J]. 数学教育学报，2018(1):42—45

[4] 郑玮，郑毓信. HPM 与数学教学中的“再创造”[J]. 数学教育学报，2013(3):5—7