

江苏省仪征中学高三数学周三练习 2

班级_____ 学号_____ 姓名_____

一、 单选

1. “ $\sin \alpha = \cos \alpha$ ”是“ $\cos 2\alpha = 0$ ”的 ()

- A. 充分但不必要条件 B. 必要但不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

2. 已知 $a = \log_3 5$, $b = \ln \frac{1}{2}$, $c = 1.5^{-1.1}$, 则 a, b, c 的大小关系正确的是 ()

- A. $b < c < a$ B. $b < a < c$ C. $a < c < b$ D. $a < b < c$

3. 已知半径为 1 的圆经过点 $(3, 4)$, 则其圆心到原点的距离的最小值为 ().

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

4. 我国的 5G 通信技术领先世界, 5G 技术的数学原理之一是著名的香农(Shannon)公式, 香农提出并严格证明了“在被高斯白噪声干扰的信道中, 计算最大信息传送速率 C 的公式 $C = W \cdot \log_2(1 + \frac{S}{N})$ ”, 其中 W 是信道带宽 (赫兹), S 是信道内所传信号的平均功率 (瓦), N 是信道内部的高斯噪声功率 (瓦), 其中 $\frac{S}{N}$ 叫做信噪比. 根据此公

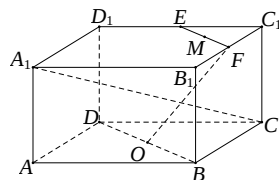
式, 在不改变 W 的前提下, 将信噪比从 99 提升至 λ , 使得 C 大约增加了 60%, 则 λ 的值大约为(参考数据: $10^{0.2} \approx 1.58$) ()

- A. 1559 B. 3943
C. 1579 D. 2512

二、 多选

5. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为 C_1D_1, B_1C_1 的中点, O, M 分别为 BD, EF 的中点, 则下列说法正确的是 ()

- A. 四点 B, D, E, F 在同一平面内
B. 三条直线 BF, DE, CC_1 有公共点
C. 直线 A_1C 与直线 OF 不是异面直线
D. 直线 A_1C 上存在点 N 使 M, N, O 三点共线



6、已知曲线 $C: mx^2 + ny^2 = 1$. ()

A. 若 $m > n > 0$, 则 C 是椭圆, 其焦点在 y 轴上

B. 若 $m = n > 0$, 则 C 是圆, 其半径为 $\sqrt{n}$

C. 若 $mn < 0$, 则 C 是双曲线, 其渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{-\frac{m}{n}}x$

D. 若 $m = 0, n > 0$, 则 C 是两条直线

三. 填空

7. 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 与角 β 均以 Ox 为始边, 它们的终边关于 y 轴对称. 若 $\tan \alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\tan(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 已知三棱锥 $A-BCD$ 中, $\triangle BAC$ 和 $\triangle BDC$ 是边长为 2 的等边三角形, 且平面 $ABD \perp$ 平面 BCD , 该三棱锥外接球的表面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$

四. 解答

9. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin x - 2\cos^2 \frac{x}{2} + 1$.

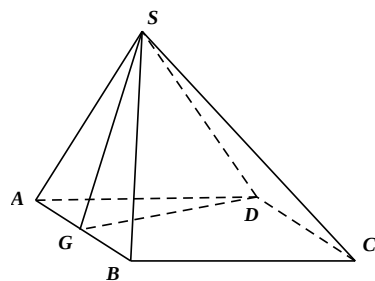
(I) 若 $f(\alpha) = 2\sqrt{3}f(\alpha + \frac{\pi}{6})$, 求 $\tan \alpha$ 的值;

(II) 将函数 $f(x)$ 图象上所有点的纵坐标保持不变, 横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍得函数 $g(x)$ 的图象, 若关于 x 的方程 $g(x) - m = 0$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上有解, 求 m 的取值范围.

10.如图,在四棱锥 $S-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是菱形, G 是线段 AB 上一点(不含 A, B), 在平面 SGD 内过点 G 作 $GP \parallel$ 平面 SBC 交 SD 于点 P .

(I) 写出作点 P 、 GP 的步骤(不要求证明);

(II) 若 $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$, $AB = SA = SB = SD = 2$, P 是 SD 的中点, 求平面 SBC 与平面 SGD 所成锐二面角的大小.



11、已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F_2(3, 0)$, 离心率为 e .

(1) 若 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 求椭圆的方程.

(2) 设直线 $y=kx$ 与椭圆相交于 A, B 两点, M, N 分别为线段 AF_2, BF_2 的中点. 若坐标原点 O 在

以 MN 为直径的圆上, 且 $\frac{\sqrt{2}}{2} < e \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, 求 k 的取值范围.

1.A

2.A

3.A

4.C

5.ABD

6.ACD

7. $\frac{3}{4}$ 8. $\frac{20\pi}{3}$ 9. 解: (I) 因为 $f(x) = \sqrt{3}\sin x - 2\cos^2 \frac{x}{2} + 1$

$$= \sqrt{3}\sin x - \cos x \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$= 2\sin(x - \frac{\pi}{6}), \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } f(\alpha) = 2\sqrt{3}f(\alpha + \frac{\pi}{6}), \text{ 所以 } \sin(\alpha - \frac{\pi}{6}) = 2\sqrt{3}\sin \alpha, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \alpha - \frac{1}{2}\cos \alpha = 2\sqrt{3}\sin \alpha, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{即 } -3\sqrt{3}\sin \alpha = \cos \alpha, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \tan \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{9}; \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(II) $f(x)$ 图象上所有点横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍得到函数 $g(x)$ 的图象,

$$\text{所以函数 } g(x) \text{ 的解析式为 } g(x) = f(2x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{6}), \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{因 } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } -\frac{\pi}{6} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{6}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } -1 \leq g(x) \leq 2, \text{ 故 } m \text{ 的取值范围为 } [-1, 2]. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

10. 解: (I) 第一步: 在平面 $ABCD$ 内作 $GH \parallel BC$ 交 CD 于点 H ; $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$ 第二步: 在平面 SCD 内作 $HP \parallel SC$ 交 SD 于 P ; $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$ 第三步: 连接 GP , 点 P 、 GP 即为所求. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$ (II) 因 P 是 SD 的中点, $HP \parallel SC$, 所以 H 是 CD 的中点, $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$ 而 $GH \parallel BC$, 所以 G 是 AB 的中点. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$ 连 AC, GD 交于 O , 连 SO , 设 S 在底面 $ABCD$ 的射影为 M , $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$ 因为 $SA = SB = SD$, 所以 $MA = MB = MD$, 即 M 为 $\triangle ABD$ 的外心,

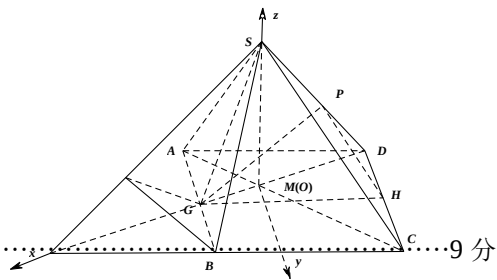
$$\text{所以 } M \text{ 与 } O \text{ 重合}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{因 } OD = \frac{2\sqrt{3}}{3}, SD = 2, \text{ 所以 } SO = \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

$$OC = \frac{2}{3}AC = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

过 O 作 $OE \parallel GB$ 交 BC 于 E , 以 $\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OS}$ 分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系, 则

$$S(0, 0, \frac{2\sqrt{6}}{3}), B(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, 0), C(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2, 0), \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$



所以 $\overrightarrow{SB} = (\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, -\frac{2\sqrt{6}}{3})$, $\overrightarrow{BC} = (-\sqrt{3}, 1, 0)$, 设平面 SBC 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{SB} = \frac{\sqrt{3}}{3}x + y - \frac{2\sqrt{6}}{3}z = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = -\sqrt{3}x + y = 0 \end{cases}$$

取 $z = \sqrt{2}$, 则 $x = 1, y = \sqrt{3}$,

所以 $\vec{n} = (1, \sqrt{3}, \sqrt{2})$10 分

又 $\overrightarrow{GB} \perp$ 平面 SGD ,

故 $\overrightarrow{GB} = (0, 1, 0)$ 为平面 SGD 的法向量,11 分

设平面 SBC 与平面 SGD 所成锐二面角的大小为 θ ,

$$\text{则} \cos \theta = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{GB}|}{|\vec{n}| |\overrightarrow{GB}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

因为 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $\theta = \frac{\pi}{4}$. 12 分

故平面 SBC 与平面 SGD 所成锐二面角的大小为 $\frac{\pi}{4}$.

11. 【解析】(1)由已知 $\begin{cases} c = 3 \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$, 得 $a = 2\sqrt{3}$, 所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2)由 $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = kx \end{cases}$ 得 $(b^2 + a^2 k^2)x^2 - a^2 b^2 = 0$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 所以 $x_1 + x_2 = 0, x_1 x_2 = \frac{-a^2 b^2}{b^2 + a^2 k^2}$,

由已知可得, $OM \perp ON$, 易证四边形 OMF_2N 为平行四边形, 所以 $AF_2 \perp BF_2$,

因为 $\overrightarrow{F_2A} = (x_1 - 3, y_1), \overrightarrow{F_2B} = (x_2 - 3, y_2)$,

所以 $\overrightarrow{F_2A} \cdot \overrightarrow{F_2B} = (x_1 - 3)(x_2 - 3) + y_1 y_2 = (1 + k^2)x_1 x_2 + 9 = 0$,

即 $\frac{-a^2 \cdot (a^2 - 9) \cdot (1 + k^2)}{a^2 k^2 + (a^2 - 9)} + 9 = 0$, 整理为 $k^2 = \frac{a^4 - 18a^2 + 81}{a^4 - 18a^2} = -1 - \frac{81}{a^4 - 18a^2}$,

因为 $\frac{\sqrt{2}}{2} < e \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $2\sqrt{3} \leq a < 3\sqrt{2}, 12 \leq a^2 < 18$.

所以 $k^2 \geq \frac{1}{8}$, 即 k 的取值范围是 $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{4}] \cup [\frac{\sqrt{2}}{4}, +\infty)$.