

§ 2.3 幂函数与二次函数

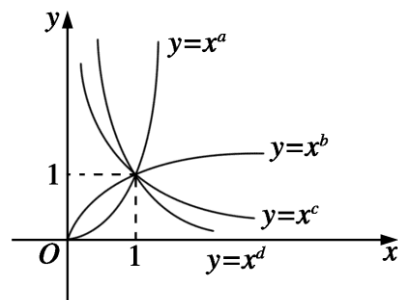
复习目标

1. 了解幂函数的概念,理解并掌握二次函数的定义、图象及性质.
2. 结合函数 $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=\frac{1}{x}$, $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的图象,了解它们的变化情况.
3. 能用二次函数、方程、不等式之间的关系解决简单问题.

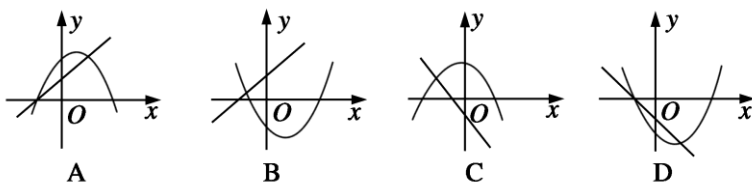
课前热身

1. 若四个幂函数 $y=x^a$, $y=x^b$, $y=x^c$, $y=x^d$ 在同一坐标系中的图象如图所示,则 a, b, c, d 的大小关系是()

- A. $d > c > b > a$ B. $a > b > c > d$
C. $d > c > a > b$ D. $a > b > d > c$



2. 一次函数 $y=ax+b$ 与二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 在同一坐标系中的图象大致是()



3. 已知 $f(x) = -4x^2 + 4ax - 4a - a^2$ 在 $[0, 1]$ 内的最大值为 -5 , 则 a 的值为()

- A. $\frac{5}{4}$ B. 1 或 $\frac{5}{4}$ C. -1 或 $\frac{5}{4}$ D. -5 或 $\frac{5}{4}$

4. 若幂函数 $y=(m^2-3m+3)x^{m^2-m-2}$ 的图象不经过原点, 则实数 m 的值为_____.

5. 已知二次函数 $f(x)$ 的图象的顶点坐标是 $(-2, -1)$, 且图象经过点 $(1, 0)$, 则函数 $f(x)$ 的解析式为_____.

6. 已知二次函数 $f(x) = x^2 - bx + c$ 满足 $f(0) = 3$, 对 $\forall x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(1+x) = f(1-x)$ 成立, 则函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) =$ _____.

知识梳理

典例研究**考点一 幂函数图象与性质**

例 1. (1) 已知幂函数 $f(x)=(n^2+2n-2)x^{n^2-3n}$ ($n \in \mathbf{Z}$) 的图象关于 y 轴对称, 且在 $(0, +\infty)$ 上是减函数, 则 n 的值为()

A. -3

B. 1

C. 2

D. 1 或 2

(2) 已知幂函数 $y=f(x)$ 的图象过点 $\left(2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 则此函数的解析式为_____, 在区间_____上单调递减.

(3) 若 $(a+1)^{\frac{1}{2}} < (3-2a)^{\frac{1}{2}}$, 则实数 a 的取值范围是_____.

考点二 二次函数的解析式、图象与性质

例 2. 已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(2)=-1$, $f(-1)=-1$, 且 $f(x)$ 的最大值是 8, 求此二次函数的解析式.

例 3. 已知 $f(x)=x^2-2x+5$.

(1) 若 $x \in \mathbf{R}$, 则函数 $f(x)$ 的最小值为_____;

(2) 若 $x \in [-1, 2]$, 则函数 $f(x)$ 的最小值为_____, 最大值为_____;

(3) 若 $x \in [t, t+1]$, 则函数 $f(x)$ 的最小值为_____.

(4) 在 (3) 的条件下, 则 $f(x)$ 的最大值为_____.

考点三 二次函数中的恒成立、有解问题

例 4. 已知两函数 $f(x)=8x^2+16x-k$, $g(x)=2x^2+4x+4$, 其中 k 为实数.

(1) 对任意 $x \in [-3, 3]$, 都有 $f(x) \leq g(x)$ 成立, 求 k 的取值范围;

(2) 存在 $x \in [-3, 3]$, 使 $f(x) \leq g(x)$ 成立, 求 k 的取值范围;

(3) 对任意 $x_1, x_2 \in [-3, 3]$, 都有 $f(x_1) \leq g(x_2)$, 求 k 的取值范围.

课堂小结

跟踪反馈

1. 已知幂函数 $y=f(x)$ 的图象, 经过点 $(2, 2\sqrt{2})$, 则幂函数的解析式为()

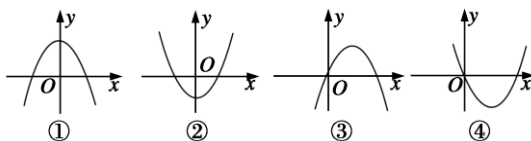
A. $y=2x^{\frac{1}{2}}$

B. $y=x^{\frac{1}{2}}$

C. $y=x^{\frac{3}{2}}$

D. $y=\frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}}$

2. (多选题) 设 $b \geq 0$, 二次函数 $y=ax^2+bx+a^2-1$ 的图象为下列之一, 则 a 的值为()



A. $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

B. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

C. 1

D. -1

3. 已知 $\alpha \in \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$. 若幂函数 $f(x)=x^\alpha$ 为奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上递减, 则 $\alpha=$ _____.

4. (1) 已知函数 $f(x)=x^2+mx-1$, 若对于任意 $x \in [m, m+1]$, 都有 $f(x)<0$ 成立, 则实数 m 的取值范围是_____.

(2) 已知函数 $f(x)=x^2-x+1$, 在区间 $[-1, 1]$ 上不等式 $f(x)>2x+m$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是_____.

5. 设函数 $f(x)=ax^2-2x+2$,

(1) 对于满足 $1<x<4$ 的一切 x 值都有 $f(x)>0$, 求实数 a 的取值范围.

(2) 当 $1<x<4$ 时, $f(x)>0$ 有解, 求实数 a 的取值范围.

6. 已知函数 $f(x)=x^2-2x$, $g(x)=ax+2(a>0)$, 对任意的 $x_1 \in [-1, 2]$ 都存在 $x_0 \in [-1, 2]$, 使得 $g(x_1)=f(x_0)$, 求实数 a 的取值范围.

纠错补偿

1. 订正： 题号

2. 补偿训练：