

江苏省仪征中学 2020 届高三年级第一学期 B 版午间 “3+1” (42)

2019 年 12 月 13

班级_____姓名_____学号_____评价_____

请将填空题答案填在横线上，并将每个题目的解答过程写在题目下方。

1. 已知点 A 、 B 是圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 上任意两点，且满足 $AB = 2\sqrt{3}$. 点 P 是圆

$C: (x+4)^2 + (y+3)^2 = 4$ 上任意一点，则 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}|$ 的取值范围是_____.

2. 已知圆 $M: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ ，直线 $l: x+y-6=0$ ， A 为直线 l 上一点.

若圆 M 上存在两点 B, C ，使得 $\angle BAC = 60^\circ$ ，则点 A 横坐标的取值范围是_____.

3. 设实数 $a \geq 1$ ，若不等式 $x|x-a| + 2 \geq a$ ，对任意的实数 $x \in [1, 3]$ 恒成立，则满足条件的实数 a 的取值范围是_____.

4. 已知向量 $\vec{a} = (2\cos\alpha, \sin^2\alpha)$ ， $\vec{b} = (2\sin\alpha, t)$ ， $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ， t 为实数.

(1) 若 $\vec{a} - \vec{b} = (\frac{2}{5}, 0)$ ，求 t 的值；

(2) 若 $t=1$ ，且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ ，求 $\tan(2\alpha + \frac{\pi}{4})$ 的值.

1. 已知点 A 、 B 是圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 上任意两点, 且满足 $AB = 2\sqrt{3}$. 点 P 是圆

$C: (x+4)^2 + (y+3)^2 = 4$ 上任意一点, 则 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}|$ 的取值范围是_____.

[4,16];

2. 已知圆 $M: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$, 直线 $l: x+y-6=0$, A 为直线 l 上一点.

若圆 M 上存在两点 B, C , 使得 $\angle BAC = 60^\circ$, 则点 A 横坐标的取值范围是_____.

[1,5];

3. 设实数 $a \geq 1$, 若不等式 $x|x-a|+2 \geq a$, 对任意的实数 $x \in [1,3]$ 恒成立, 则满足条件的实数 a 的取值范围是_____.

$1 \leq a \leq 2$ 或 $a \geq \frac{7}{2}$

4. 解: (1) 向量 $\vec{a} = (2\cos\alpha, \sin^2\alpha)$, $\vec{b} = (2\sin\alpha, t)$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, t 为实数, 若 $\vec{a} - \vec{b} = (\frac{2}{5}, 0)$, 则 $(2\cos\alpha - 2\sin\alpha, \sin^2\alpha - t) = (\frac{2}{5}, 0)$,

可得 $\cos\alpha - \sin\alpha = \frac{1}{5}$, 平方可得 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\sin\alpha = \frac{1}{25}$,

即为 $2\cos\alpha\sin\alpha = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$, ($\cos\alpha > 0$, $\sin\alpha > 0$),

由 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, 解得 $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{(\cos\alpha - \sin\alpha)^2 + 4\sin\alpha\cos\alpha} = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{48}{25}} = \frac{7}{5}$,

即有 $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$.

则 $t = \sin^2\alpha = \frac{16}{25}$;

(2) 若 $t=1$, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$, 即有 $4\cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha = 1$,

即有 $4\cos\alpha\sin\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$,

由 α 为锐角, 可得 $\cos\alpha \in (0, 1)$, 即有 $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{4}$,

则 $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{16}} = \frac{8}{15}$,

$\tan(2\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan 2\alpha + 1}{1 - \tan 2\alpha} = \frac{1 + \frac{8}{15}}{1 - \frac{8}{15}} = \frac{23}{7}$.