江苏省仪征中学2020-2021学年度高三数学周六试卷（2020.12.19）

一、选择题（本大题共8小题，共40.0分）

1. 已知集合$A=\{-1,0\}$，$B=\{0,1,2\}$，则$A\cup B$的子集个数是(　)

A. 4　　B. 8　　C. 16　　D. 32

2. 已知复数$z=\frac{5+3i}{1-i}$，则下列说法正确的是(　)

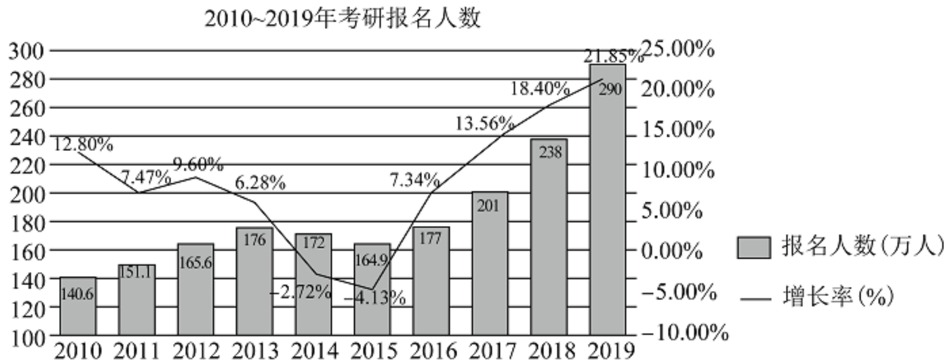
A. z的虚部为$4i$　　B. z的共轭复数为$1-4i$

C. $|z|=5$　　D. z在复平面内对应的点在第二象限

3. 已知在圆M:$x^2+y^2-4x+2y-4=0$内，过点$O(0,0)$的最长弦和最短弦分别是AC和BD，则四边形$ABCD$的面积为(　)

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

4. 下图是$2010-2019$年这十年我国考研报名人数统计图，根据统计图所提供的信息，判断下列说法正确的是(　)

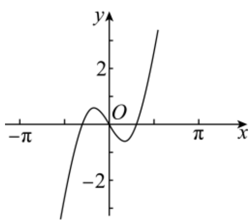


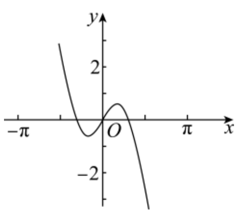
A. 2010年以来我国考研报名人数逐年增多　B. 这十年中，考研报名人数的极差超过150万人

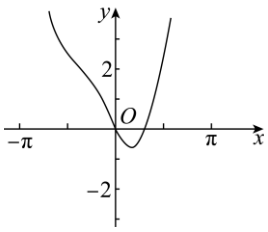
C. 这十年中，2016年相比上一年考研报名人数增速最快

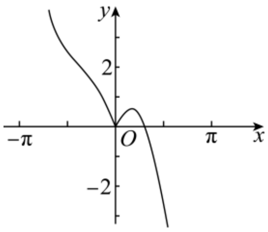
D. 考研报名人数增速最快的三年分别是2019年，2018年，2017年

5. 函数$f(x)=x|x|-\sin 2x$的大致图象是(　　)

A.


B.


C.


D.


6. 设 F 为抛物线$C:y^2=3x$的焦点，过 F 且倾斜角为$30°$的直线交 C 于 A，B 两点，O 为坐标原点，则$\triangle OAB$的面积为( )

A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　B. $\frac{9\sqrt{3}}{8}$　　C. $\frac{63}{32}$　　D. $\frac{9}{4}$

7. 已知$f(x)$是定义在 R 上的奇函数，当$x\in(0,+\infty)$时，$f(x)=2^x-2$，则不等式$f(\log_2 x)>0$的解集为( )

A. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$　B. $\left(\frac{1}{2},1\right)\cup(2,+\infty)$　C. $(2,+\infty)$　D. $(0,\frac{1}{2})\cup(2,+\infty)$

8. 已知函数$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x+1}-3, x\in(-1,0]\\ x, x\in(0,1]\end{cases}$，且$g(x)=f(x)-\mathrm{mx}-m$在$(-1,1]$内有且仅有两个不同的零点，则实数 m 的取值范围是( )

A. $(-\frac{9}{4},-2]\cup(0,\frac{1}{2}]$ B. $(-\frac{11}{4},-2]\cup(0,\frac{1}{2}]$　C. $(-\frac{9}{4},-2]\cup(0,\frac{2}{3}]$　D. $(-\frac{11}{4},-2]\cup(0,\frac{2}{3}]$

二、不定项选择题（本大题共 4 小题，共 16.0 分）

9. (多选题)下列函数中，在区间$(0,+\infty)$上为减函数的有( ).

A. $y=\sqrt{x+1}$　B. $y=-(x+1)^2$　C. $y=2^{-x}$　D. $y=\log_{0.5}(x+1)$

10. 下列说法正确的有( )

A. 若$a>b$,那么$\frac{1}{a^3}<\frac{1}{b^3}$　　B. 若$a<b<0$，则$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

C. 若$x>0$，则$x+\frac{4}{x+2}$有最小值 2　　D. 若$x\in R$，则$\frac{2x}{x^2+1}$有最大值 1

11. 给出下列四个命题，正确的是( )

A. 函数$y=\mathrm{tanx}$的图象关于点$(\frac{\pi}{2},0)$对称　B. 函数$f(x)=\sin|x|$是最小正周期为π的周期函数

C. 设θ为第二象限的角，则$\tan\frac{\theta}{2}>\cos\frac{\theta}{2}$，且$\sin\frac{\theta}{2}>\cos\frac{\theta}{2}$

D. 函数$y=\cos^2x+\mathrm{sinx}$的最小值为-1

12. 关于函数$f(x)=\frac{2}{x}+lnx$，下列判断正确的是( )

A. $x=2$是$f(x)$的极大值点 B. 函数$y=f(x)-x$有且只有 1 个零点

C. 存在正实数 k，使得$f(x)>kx$成立

D. 对两个不相等的正实数x_1，x_2，若$f(x_1)=f(x_2)$，则$f(x_1+x_2)>\frac{1}{2}+\ln 4$.

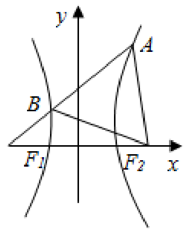
三、填空题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

13. 在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=120°$，$BA=4$，$BC=2$，D 是 AC 边上一点，且$\overrightarrow{DC}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{DA}$，则

$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=$________.

14. 将函数$f(x)=\sin x\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sqrt{3}\cos(x+\pi)\cos(\pi-x)-\frac{\sqrt{3}}{2}$的图象上各点的纵坐标保持不变，横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$，再把所得的函数图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，得到函数$y=g(x)$的图象，则函数$g(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上的取值范围为_________.

15. 如图，F_1、F_2是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，过$F_1$的直线 l 与双曲线的左右两支分别交于点 A、B.若$\triangle ABF_2$为等边三角形，则双曲线的离心率为_______.



16. 已知三棱锥$P-\mathrm{ABC}$的四个顶点均在同一个球面上，底面 ABC 满足$\mathrm{BA}=\mathrm{BC}=\sqrt{6}$，$\angle\mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2}$，若该三棱锥体积的最大值为 3，则其外接球的体积为__________.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 72.0 分）

17. 已知函数$f(x)=\cos^2x+\sqrt{3}\sin(\pi-x)\cos(\pi+x)-\frac{1}{2}$. (1)求函数$f(x)$在$[0,\pi]$上的单调递减区间；

(2)在锐角ΔABC中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$f(A)=-1,a=2,b\sin C=a\sin A$，求$\Delta ABC$的面积.

18. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点$A(-1,0)$，$B(1,2)$，直线 l 与 AB 平行.

(1)求直线 l 的斜率；

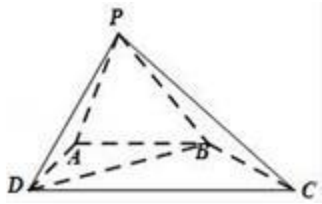
(2)已知圆 C：$x^2+y^2-4x=0$与直线 l 相交于 M，N 两点，且$\mathrm{MN}=\mathrm{AB}$，求直线 l 的方程；

(3)在(2)的圆 C 上是否存在点 P，使得$PA^2+PB^2=12$？若存在，求点 P 的个数；若不存在，说明理由.

19. 如图，四棱锥$P-ABCD$中，$AB//DC$，$\angle ADC=\frac{\pi}{2}$，$AB=AD=\frac{1}{2}CD=2$，$PA=PD=PB=\sqrt{6}$.

(1)求证：$BC\perp PD$；

(2)在线段 PC 上是否存在点 M，使得平面 ABM 与平面 PBD 所成锐二面角为$\frac{\pi}{3}$？若存在，求 MC 的长；若不存在，说明理由.



20. 核酸检测是诊断新冠肺炎的重要依据，首先取病人的唾液或咽拭子的样本，再提取唾液或咽拭子样本里的遗传物质，如果有病毒，样本检测会呈现阳性，否则为阴性.根据统计发现，疑似病例核酸检测呈阳性的概率为$p(0<p<1)$，现有 4 例疑似病例，分别对其取样、检测，多个样本检测时，既可以逐个化验，也可以将若干个样本混合在一起化验，混合样本中只要有病毒，则混合样本化验结果就会呈阳性，若混合样本呈阳性，则将该组中各个样本再逐个化验；若混合样本呈阴性，则该组各个样本均为阴性．现有以下三种方案：

方案一：逐个化验；方案二：四个样本混在一起化验；方案三：平均分成两组化验．在新冠肺炎爆发初期，由于检查能力不足，化检次数的期望值越小，则方案越“优”．

(1)若$p=\frac{1}{4}$，求 2 个疑似病例样本混合化验结果为阳性的概率；

(2)若$p=\frac{1}{4}$，现将该 4 例疑似病例样本进行化验，请问：方案一、二，三中哪个最“优”·

(3)若对 4 例疑似病例样本进行化验，且“方案二”比“方案一”更“优”，求 p 的取值范围.

21. 已知点 M 为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上一点，$F_1$，$F_2$分别是椭圆的左、右焦点，$\angle F_1MF_2=60°$，$\triangle MF_1F_2$的面积为$2\sqrt{3}$，椭圆的离心率为$\frac{1}{2}$.

(1)求椭圆的方程；

(2)过点$N(0,\frac{1}{2})$任意作一条直线 l，与椭圆交于 A，B 两点，问 y 轴上是否存在定点 P，使得 PN 平分$\angle APB$？若存在，求出 P 点，若不存在，请说明理由.

22. 已知函数$f(x)=x\ln x-\frac{a}{2}x^2(a\in R)$.

(Ⅰ)若$x>0$，恒有$f(x)\le x$成立，求实数 a 的取值范围；

(Ⅱ)若函数$g(x)=f(x)-x$有两个相异极值点x_1，x_2，求证：$\frac{1}{\ln x_1}+\frac{1}{\ln x_2}>2ae$.

答案和解析

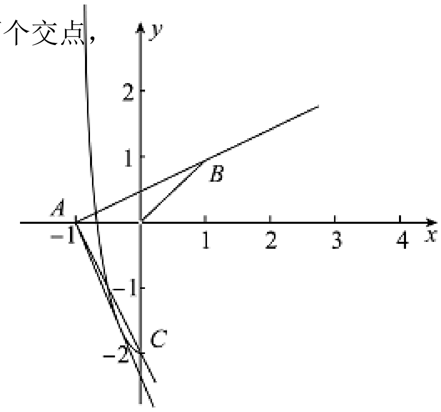
1.【答案】C 2.【答案】B 3.【答案】D 4.【答案】D 5.【答案】A 6.【答案】D 7.【答案】B

8.【答案】A 解：由$g(x)=f(x)-mx-m=0$，即$f(x)=m(x+1)$，分别作出函数$f(x)$和

$y=h(x)=m(x+1)$的图象如图：由图象可知$f(1)=1$，$h(x)$表示过定点$A(-1,0)$的直线，

当$h(x)$过$(1,1)$时，$m=\frac{1}{2}$此时两个函数有两个交点，此时满足条件的 m 的取值范围是$0<m\leqslant\frac{1}{2}$；

当$h(x)$过$(0,-2)$时，$h(0)=-2$，解得$m=-2$，此时两个函数有两个交点，



当$h(x)$与$f(x)$相切时，两个函数只有一个交点，

此时$\frac{1}{x+1}-3=m(x+1)$，即$m(x+1)^2+3(x+1)-1=0$，

当$m=0$时，$x=-\frac{2}{3}$，只有 1 解，

当$m\neq 0$，由$\Delta=9+4m=0$得$m=-\frac{9}{4}$，此时直线和$f(x)$相切，

$\therefore$要使函数有两个零点，则$-\frac{9}{4}<m\leq -2$或$0<m\leq\frac{1}{2}$，

9.【答案】BCD 10.【答案】BD 11.【答案】AD 12.【答案】BD

解：A.函数的的定义域为$(0,+\infty)$，函数的导数$f'(x)=-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-2}{x^2}$，

$\therefore(0,2)$上，$f'(x)<0$，函数单调递减，$(2,+\infty)$上，$f'(x)>0$，函数单调递增，

$\therefore x=2$是$f(x)$的极小值点，即 A 错误；

$B.y=f(x)-x=\frac{2}{x}+lnx-x$，$\therefore y'=-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}-1=\frac{-x^2+x-2}{x^2}<0$，

函数在$(0,+\infty)$上单调递减，且$f(1)-1=2+ln1-1=1>0, f(2)-2=1+ln2-2=\ ln2-1<0$，

$\therefore$函数$y=f(x)-x$有且只有 1 个零点，即 B 正确；

C.若$f(x)>kx$，可得$k<\frac{2}{x^2}+\frac{\ln x}{x}$，令$g(x)=\frac{2}{x^2}+\frac{\ln x}{x}$，则$g'(x)=\frac{-4+x-x\ln x}{x^3}$，

令$h(x)=-4+x-xlnx$，则$h'(x)=-lnx$，

$\therefore$在$x\in(0,1)$上，函数$h(x)$单调递增，$x\in(1,+\infty)$上函数$h(x)$单调递减，

$\therefore h(x)\leqslant h(1)<0$，$\therefore g'(x)<0$，$\therefore g(x)=\frac{2}{x^2}+\frac{\ln x}{x}$在$(0,+\infty)$上函数单调递减，函数无最小值，

$\therefore$不存在正实数 k，使得$f(x)>kx$恒成立，即 C 不正确；

D.令$t\in(0,2)$，则$2-t\in(0,2)$，$2+t>2$，

令$g(t)=f(2+t)-f(2-t)=\frac{2}{2+t}+\ln(2+t)-\frac{2}{2-t}-\ln(2-t)=\frac{4t}{t^2-4}+\ln\frac{2+t}{2-t}$，

则$g'(t)=\frac{4(t^2-4)-8t^2}{(t^2-4)^2}+\frac{2-t}{2+t}\cdot\frac{2-t+2+t}{(2-t)^2}=\frac{-4t^2-16}{(t^2-4)^2}+\frac{4}{4-t^2}=\frac{-8t^2}{(t^2-4)^2}<0$，

$\therefore g(t)$在$(0,2)$上单调递减，则$g(t) < g(0) = 0$，

令$x_1 = 2 - t$，由$f(x_1) = f(x_2)$，得$x_2 > 2 + t$，则$x_1 + x_2 > 2 - t + 2 + t = 4$，

当$x_2 \geq 4$时，$x_1 + x_2 > 4$显然成立，

$\therefore$对任意两个正实数x_1，x_2，且$x_2 > x_1$，若$f(x_1) = f(x_2)$，则$x_1 + x_2 > 4$，

所以$f(x_1 + x_2) > f(4) = \frac{1}{2} + \ln 4$.故 D 正确，

故选 BD.

13.【答案】-4 14.【答案】$[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$ 15.【答案】$\sqrt{7}$

解：设ΔABF_2的边长为 m，则由双曲线的定义，可得$|BF_1| = m - 2a$，$\therefore |AF_1| = 2m - 2a$.

$\because |AF_1| - |AF_2| = 2a$，$\therefore 2m - 2a - m = 2a$，$\therefore m = 4a$.

在$\triangle AF_1F_2$中，$|AF_1| = 6a$，$|AF_2| = 4a$，$|F_1F_2| = 2c$，$\angle F_1AF_2 = 60^\circ$，

$\therefore$由余弦定理可得$4c^2 = (6a)^2 + (4a)^2 - 2 \cdot 6a \cdot 4a \cdot \frac{1}{2}$，$\therefore c = \sqrt{7}a$，$\therefore e = \frac{c}{a} = \sqrt{7}$.

16.【答案】$\frac{32}{3}\pi$ 解：$\because \triangle ABC$是等腰直角三角形，

$\therefore AC$为截面圆的直径，故外接球的球心 O 在截面 ABC 中的射影为 AC 的中点 D，

$\therefore$当 P，O，D 共线且 P，O 位于截面同一侧时棱锥的体积最大，棱锥的最大高度为 PD，

$\therefore \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \sqrt{6} \times PD = 3$， 解得$PD = 3$，设外接球的半径为 R，则$OD = 3 - R$，$OC = R$，

在$\triangle ODC$中，$CD = \frac{1}{2}AC = \sqrt{3}$，由勾股定理得：$(3 - R)^2 + 3 = R^2$，解得$R = 2$.

$\therefore$外接球的体积$V = \frac{4\pi}{3} \times 2^3 = \frac{32}{3}\pi$．故答案为$\frac{32}{3}\pi$.

17.【答案】解：(1)由已知得$f(x) = cos^2x - \sqrt{3}sinxcosx - \frac{1}{2} = \frac{1+cos2x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}sin2x - \frac{1}{2}$

$= -\sin(2x - \frac{\pi}{6})$，由$2k\pi - \frac{\pi}{2} \leqslant 2x - \frac{\pi}{6} \leqslant 2k\pi + \frac{\pi}{2}$，$k \in Z$，可得$k\pi - \frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant k\pi + \frac{\pi}{3}$，$k \in Z$，

又$x \in [0, \pi]$，$\therefore$函数$f(x)$在$[0, \pi]$的单调递减区间为$[0, \frac{\pi}{3}]$和$[\frac{5\pi}{6}, \pi]$；

(2)由(1)知$f(x) = -\sin(2x - \frac{\pi}{6})$，由$f(A) = -1$，可得$f(A) = -\sin(2A - \frac{\pi}{6}) = -1$，

$\because \triangle ABC$中是锐角三角形，$\therefore 0 < A < \frac{\pi}{2}$，$\therefore -\frac{\pi}{6} < 2A - \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}$，又$f(A) = -\sin(2A - \frac{\pi}{6}) = -1$，

$\therefore 2A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$，即$A = \frac{\pi}{3}$，又$bsinC = asinA$，$\therefore$由正弦定理可得$bc = a^2 = 4$，$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bcsinA = \sqrt{3}$.

18.【答案】解：(1) $\because$点$A(-1,0)$，$B(1,2)$，直线 l 与 AB 平行，$\therefore$直线 l 的斜率$k = k_{\text{AB}} = \frac{2-0}{1-(-1)} = 1$.

(2) $\because$圆 C：$x^2 + y^2 - 4x = 0$，$\therefore$圆 C 的标准方程为：$(x - 2)^2 + y^2 = 4$，圆心$C(2,0)$，半径为 2，

由(1)知直线 l 的斜率$k = 1$，设直线 l 的方程为$x - y - m = 0$，

则圆心 C 到直线 l 的距离$d=\frac{|2-0+m|}{\sqrt{2}}=\frac{|2+m|}{\sqrt{2}}$，$\because MN=AB=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，而$CM^2=d^2+(\frac{MN}{2})^2$，

$\therefore 4=\frac{(2+m)^2}{2}+2$，解得$m=0$或$m=-4$，故直线 l 的方程为$x-y=0$或$x-y+4=0$．

(3)假设圆 C 上存在点 P，设$P(x,y)$，则$(x-2)^2+y^2=4$，

$PA^2+PB^2=(x+1)^2+(y-0)^2+(x-1)^2+(y-2)^2=12$，

整理，得$x^2+y^2-2y-3=0$，即$x^2+(y-1)^2=4$，$\because |2-2|<\sqrt{(2-0)^2+(0-1)^2}<2+2$，

$\therefore$圆$(x-2)^2+y^2=4$与圆$x^2+(y-1)^2=4$相交，$\therefore$点 P 的个数为 2．

19.【答案】(1)证明：因为四边形 $ABCD$ 为直角梯形，且 $AB//DC$，$AB=AD=2$，$\angle ADC=\frac{\pi}{2}$，

所以$BD=2\sqrt{2}$，又因为$CD=4$，$\angle BDC=\frac{\pi}{4}$，根据余弦定理得$BC=2\sqrt{2}$，

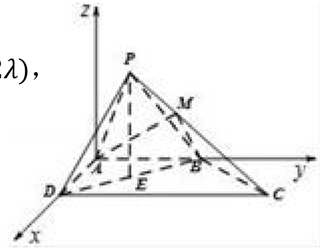
所以$CD^2=BC^2+BD^2$，故 $BC\perp BD$，设 E 为 BD 的中点，连结 PE，

因为$PB=PD=\sqrt{6}$，$BD=2\sqrt{2}$，所以$PE\perp BD$，$PE=2$，因为$AE=\sqrt{2},PE=2,PA=\sqrt{6}$，

所以$AE^2+PE^2=PA^2$，所以$PE\perp AE$，又因为$AE\cap BD=E$，AE、$BD\subset$平面 $ABCD$，

所以$PE\perp$平面 $ABDE$，又因为$BC\subset$平面 $ABCD$，所以$PE\perp BC$，又因为$BC\perp BD$，$PE\cap BD=E$，PE、$BD\subset$平面 PBD，所以$BC\perp$平面 PBD 因为$PD\subset$平面 PBD，所以$BC\perp PD$；

(2)解：由(1)$PE\perp$平面 $ABCD$，如图，以 A 为原点分别以 AD，AB 和垂直平面 $ABCD$ 的方向为坐标轴，建立空间直角坐标系$A-xyz$，则$A(0,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(2,4,0)$，$D(2,0,0)$，$P(1,1,2)$，



假设存在 M 满足要求，设$\overrightarrow{CM}=\lambda\overrightarrow{CP}$，$(0\le\lambda\le1)$，所以$M(2-\lambda,4-3\lambda,2\lambda)$，

$\therefore \overrightarrow{AB}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{AM}=(2-\lambda,4-3\lambda,2\lambda)$，

由(1)知平面 PBD 的一个法向量为$\overrightarrow{BC}=(2,2,0)$，

设$\vec{n}=(x,y,z)$为平面 ABM 的一个法向量，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0\end{cases}$，

即$\begin{cases}2y=0\\(2-\lambda)x+(4-3\lambda)y+2\lambda z=0\end{cases}$,不妨取$\vec{n}=(2\lambda,0,\lambda-2)$，则$\cos<\overrightarrow{BC},\vec{n}>=\frac{\overrightarrow{BC}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{BC}||\vec{n}|}=\frac{4\lambda}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{4\lambda^2+(\lambda-2)^2}}$，

因为平面 PBD 与平面 ABM 所成的锐二面角为$\frac{\pi}{3}$，所以$\frac{|4\lambda|}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{4\lambda^2+(\lambda-2)^2}}=\frac{1}{2}$，

解得$\lambda=\frac{2}{3}$，$\lambda=-2$(不合题意舍去)，故存在 M 点满足条件，且$CM=\frac{2}{3}CP=\frac{2\sqrt{14}}{3}$．

20.【答案】解：(1)2个疑似病例样本混合化验结果为阴性的概率为$(1-\frac{1}{4})^2$，

所以 2 个疑似病例样本混合化验结果为阳性的概率为$1-(1-\frac{1}{4})^2=\frac{7}{16}$．

(2)方案一：化验次数为 4，期望值为 4．方案二：四个样本混在一起化验．其化验次数 X 为 1，5．所以$E(X)=1\times\left(\frac{3}{4}\right)^4+5\times[1-\left(\frac{3}{4}\right)^4]=\frac{956}{256}=\frac{239}{64}$．

方案三：平均分成两组化验．其化验次数 Y 为 2，4，6．

由(1)知：2 个疑似病例样本混合化验结果为阳性的概率为$\frac{7}{16}$分布列为：

Y	2	4	6
P	$(1-\frac{7}{16})^2$	$C_2^1\times\frac{7}{16}\times\frac{9}{16}$	$\left(\frac{7}{16}\right)^2$

所以$E(Y)=2\times(1-\frac{7}{16})^2+4\times C_2^1\times\frac{7}{16}\times\frac{9}{16}+6\times\left(\frac{7}{16}\right)^2=\frac{960}{256}=\frac{15}{4}$.

所以$E(X)<E(Y)<4$，故方案二最“优”．

(3)方案一的期望值为 4．方案二的期望值为：$1\times(1-p)^4+5\times[1-(1-p)^4]=5-4(1-p)^4$.

由题意得：$5-4(1-p)^4<4$，即$(1-p)^4>\frac{1}{4}$，解得$0<p<1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

21.【答案】 解：(1)$|MF_1|+|MF_2|=2a$，$|MF_1|^2+|MF_2|^2-2|MF_1||MF_2|\cos60°=4c^2$，

$\therefore 3|MF_1||MF_2|=4a^2-4c^2=4b^2$，$|MF_1||MF_2|=\frac{4}{3}b^2$，$\therefore\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}b^2\sin60°=2\sqrt{3}$，

$b^2=6$.　　　又$\frac{c^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，$a^2=b^2+c^2$，$\therefore a^2=8$，∴椭圆的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1$.

(2)假设存在$P(0,\ t)$，使得 PN 平分$\angle APB$，

当 l 不垂直于 x 轴时，设 l 的方程为$y=kx+\frac{1}{2}$,

由$\begin{cases} y=kx+\frac{1}{2}, \\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1, \end{cases}$ 得$(3+4k^2)x^2+4kx-23=0$，设$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，

则$x_1+x_2=\frac{-4k}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{-23}{3+4k^2}$，$\because PN$平分$\angle APB$，$k_{PA}+k_{PB}=0$，

$\therefore\frac{y_1-t}{x_1}+\frac{y_2-t}{x_2}=0$，$x_2(y_1-t)+x_1(y_2-t)=0$，$x_2\left(kx_1+\frac{1}{2}-t\right)+x_1\left(kx_2+\frac{1}{2}-t\right)=0$，

$2kx_1x_2+\left(\frac{1}{2}-t\right)(x_1+x_2)=0$，$-2k\cdot\frac{23}{3+4k^2}+\left(\frac{1}{2}-t\right)\cdot\frac{(-4k)}{3+4k^2}=0$，

$2t-1=23$，$t=12$，∴存在点$P(0,\ 12)$，使 PN 平分$\angle APB$，

当 l 垂直于 x 轴时，l 过点 P，∴存在点$P(0,\ 12)$，使得 PN 平分$\angle APB$.

22.【答案】解：(1)$x>0$，恒有$f(x)\le x$成立，

$\therefore x\ln x-\frac{a}{2}x^2\le x$恒成立，$\therefore\frac{a}{2}\ge\frac{\ln x-1}{x}$，

设$u(x)=\frac{\ln x-1}{x}$，$\therefore u'(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}$，

当$u'(x)>0$，即$0<x<e^2$时，函数$u(x)$单调递增，

当$u'(x)<0$，即$x>e^2$时，函数$u(x)$单调递减，

$\therefore u(x)_{max}=u(e^2)=\frac{1}{e^2}$,

$\therefore \frac{a}{2} \geq \frac{1}{e^2}$，$\therefore a \geq \frac{2}{e^2}$.

∴实数 a 的取值范围为$[\frac{2}{e^2}, +\infty)$；

证明：(2)$g'(x) = f'(x) - 1 = lnx - ax$，

函数$g(x) = f(x) - x$有两个相异极值点x_1、x_2，

即$g'(x) = lnx - ax = 0$有两个不同的实根，

当$a \leq 0$时，$g'(x)$单调递增，$g'(x) = 0$不可能有两个不同的实根；

当$a > 0$时，设$h(x) = lnx - ax$，$\therefore h'(x) = \frac{1-ax}{x}$，

若$0 < x < \frac{1}{a}$时，$h'(x) > 0$，$h(x)$单调递增，

若$x > \frac{1}{a}$时，$h'(x) < 0$，$h(x)$单调递减，

$\therefore h(\frac{1}{a}) = -lna - 1 > 0$，$\therefore 0 < a < \frac{1}{e}$.

$x \in (0,1)$时，$h(x) < 0$；$x \to +\infty$时，，$h(x) < 0$，

此时$g'(x) = lnx - ax = 0$有两个不同的实根，

不妨设$x_2 > x_1 > 0$，

$\because g'(x_1) = g'(x_2) = 0$，

$\therefore lnx_1 - ax_1 = 0$，$lnx_2 - ax_2 = 0$，

先证$\frac{1}{lnx_1} + \frac{1}{lnx_2} > 2$，

即证$a < \frac{x_1+x_2}{2x_1x_2}$，

即证$\frac{lnx_2 - lnx_1}{x_2 - x_1} < \frac{x_1+x_2}{2x_1x_2}$，

即证$\ln\frac{x_2}{x_1} < \frac{x_2^2 - x_1^2}{2x_2x_1} = \frac{1}{2}(\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1}{x_2})$，

令$\frac{x_2}{x_1} = t(t > 1)$，即证$lnt < \frac{1}{2}(t - \frac{1}{t})$，

设$\varphi(t) = lnt - \frac{1}{2}(t - \frac{1}{t})$，则$\varphi'(t) = -\frac{(t-1)^2}{2t^2} < 0$，

函数$\varphi(t)$在$(1, +\infty)$上单调递减，

$\therefore \varphi(t) < \varphi(1) = 0$，$\therefore \frac{1}{lnx_1} + \frac{1}{lnx_2} > 2$，

又$\because 0 < a < \frac{1}{e}$，$\therefore ae < 1$，$\therefore \frac{1}{lnx_1} + \frac{1}{lnx_2} > 2ae$.