高三数学练习（六）

一、单选题（本大题共 8 小题，共 40.0 分）

1．已知集合 $A=\{x|2^x>3\}$，$B=\{x|x<5，x\in\mathbf{N}\}$，则 $A\cap B=$(　　)

A．{1，2}　　B．{3，4}　　C．{2，3，4}　　D．{1，2，3，4}

2．命题“$\forall x\geqslant 0$，$\tan x\geqslant \sin x$”的否定为(　　)

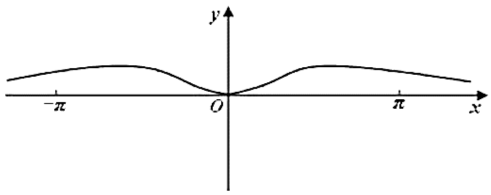
A．$\exists x_0\geqslant 0$，$\tan x_0<\sin x_0$　　B．$\exists x_0<0$，$\tan x_0<\sin x_0$

C．$\forall x\geqslant 0$，$\tan x<\sin x$　　D．$\forall x<0$，$\tan x<\sin x$

3．$\dfrac{2\sin 80^\circ-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$的值为(▲)

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

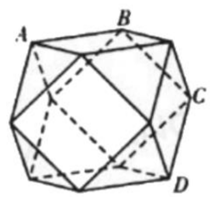
4. 已知函数$f(x)=x^2$，$g(x)=e^x+e^{-x}$(e 为自然对数的底数),则图像为如图的函数可能是(　　)



A．$y=f(x)+g(x)$　　B．$y=f(x)-g(x)$

C．$y=f(x)g(x)$　　D．$y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

5. “阿基米德多面体”也称为半正多面体，是由边数不全相同的正多边形为面围成的多面体，它体现了数学的对称美．将正方体沿交于一顶点的三条棱的中点截去一个三棱锥，共可截去八个三棱锥，得到八个面为正三角形，六个面为正方形的“阿基米德多面体”(如图)，则异面直线 AB 与 CD 所成角的大小是(　　)

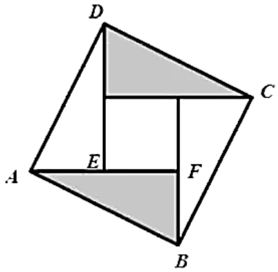


A． 30°　　B．45°　　C．60°　　D．120°

6. 已知函数$f(x)$的图象关于原点对称，且满足$f(x+4)+f(-x)=0$，且当$x\in(2,4)$时，$f(x)=-log_{\frac{1}{2}}(x-1)+m$，若$\frac{f(2021)-1}{2}=f(-1)$，则$m=$(　)

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $-\frac{4}{3}$　　D. $-\frac{3}{4}$

7．我国东汉数学家赵爽在《周髀算经》中利用一副“弦图”给出了勾股定理的证明，后人称其为“赵爽弦图”，它是由四个全等的直角三角形与一个小正方形拼成的一个大正方形，如图所示，在“赵爽弦图”中，若$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AF}$，则$\overrightarrow{EF}=$(　　)



A．$\frac{3}{7}\vec{a}+\frac{4}{7}\vec{b}$　　B．$\frac{3}{25}\vec{a}+\frac{4}{25}\vec{b}$　　C．$\frac{4}{25}\vec{a}+\frac{3}{25}\vec{b}$　　D．$\frac{4}{7}\vec{a}+\frac{3}{7}\vec{b}$

8．定义在$\mathbf{R}$上的奇函数$f(x)$的图象光滑连续不断，其导函数为$f'(x)$，对任意正实数x恒有$xf'(x)>2f(-x)$，若$g(x)=x^2f(x)$，则不等式$g(\log_3(x^2-1))+g(-1)<0$的解集是(　　)

A．$(0,2)$　　B．$(-2,2)$　　C．$(-\sqrt{3},2)$　　D．$(-2,-1)\cup(1,2)$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9．已知$a>b$，则下列结论正确的是(　　)

A．$a+b>2b$　　B．$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　C．$ac>bc$　　D．$e^{a-c}+a>e^{b-c}+b$

10．已知向量$\vec{a}=(4,3-m)$，$\vec{b}=(1,m)$，则下列说法正确的是(　　)

A．若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$m=4$　　B．若$m=\frac{3}{5}$，则$\vec{a}/\!/\vec{b}$

C．$|\vec{a}+2\vec{b}|$的最小值为6　　D．若$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为锐角，则$-1<m<4$

11．正方体$ABCD=A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，点E为BA_1的中点，下列判断正确的是(　　)

A．$AB/\!/$平面A_1CD　　B．直线EC_1与直线AD是异面直线

C．在直线A_1C_1上存在点F，使$EF\perp$平面A_1CD　　D．直线BA_1与平面A_1CD所成角是$\frac{\pi}{6}$

12．在$\triangle ABC$中，若$B=\frac{\pi}{3}$，角B的平分线BD交AC于D，且$BD=2$，则下列说法正确的是(　　)

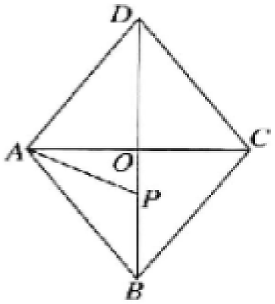
A. 若$BD=BC$，则$\triangle ABC$的面积是$\frac{3+\sqrt{3}}{2}$　B. 若$BD=BC$，$\triangle ABC$的外接圆半径是$2\sqrt{2}$

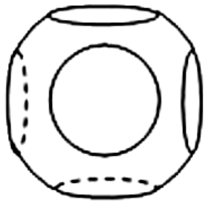
C. 若$BD=BC$，则$\frac{AD}{DC}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$　　D. $AB+BC$的最小值是$\frac{8\sqrt{3}}{3}$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13．已知函数$f(x)=\begin{cases}\log_2x，x>0\\|x-1|，x\leqslant 0\end{cases}$，若 $f(a)=2$，则实数 a 的值为_______．

14. 如图，边长为2的菱形$ABCD$的对角线相交于点O，点P在线段BO上运动，若$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=1$，则$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$的最小值为_____.



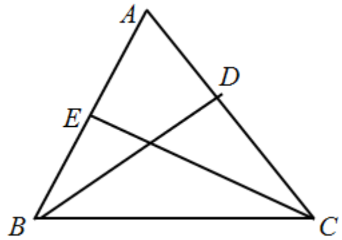


15．某同学在参加《通用技术》实践课时，制作了一个工艺品，如图所示，该工艺品可以看成是一个球被一个棱长为$4\sqrt{3}$的正方体的六个面所截后剩余的部分(球心与正方体的中心重合)，若其中一个截面圆的周长为 4π，则该球的半径是____▲____．

16．已知函数$f(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}$，$g(x)=x-2$，则关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$的实数根之和为___▲____；定义区间$(a，b)$，$[a，b)$，$(a，b]$，$[a，b]$的长度均为 $b-a$，则 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}\geqslant 1$ 的解集全部区间长度之和为___▲____．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．如图，在△ABC 中，$\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，点 D 是 AC 上一点，BD 与 CE 交于点 P，且$\overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}$．



(1)若$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AD}$，求实数 λ 的值；

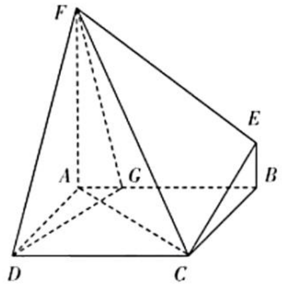
(2)若$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，求证：$\tan B=2\tan C$．

18．在△ABC 中，a，b，c 分别为角 A，B，C 的对边，已知 $b=2$，$c=4$，$2c\cos C-c\cos A=a\cos C$，点 D 为线段 BC 上的点，点 E 为线段 AB 上的点，记△ABD 和△ACD 的面积分别为S_1，S_2．

(1)若$S_1=S_2$，求 AD 的长；

(2)若$S_1=2S_2$，且$\angle AED=\dfrac{3\pi}{4}$，求 ED 的长．

19． 如图所示，矩形 $ABCD$ 所在平面与直角梯形 $ABEF$ 所在平面垂直，点 G 是边 AB 上一点，$AB=AF=4$，$AD=2$，$AG=BE=1$，$AF\perp AB$，$BE\perp AB$.



(1)求证：平面 $DFG\perp$ 平面 ACF；

(2)求平面 DFG 与平面 CEF 所成锐二面角的余弦值.

20．在 ΔABC 中，a、b、c 分别为内角 A、B、C 的对边，且

$2a\sin A=(2b+c)\sin B+(2c+b)\sin C$.

（1）求 A 的大小；

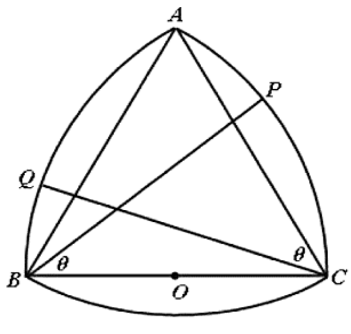
（2）若 $\sin B+\sin C=1$，试判断 ΔABC 的形状；

（3）若 $\mathbf{a=2}$，求 ΔABC 周长的最大值.

21. 数学中处处存在着美，机械学家莱洛发现的莱洛三角形就给人以对称的美感．莱洛三角形的画法：先画等边三角形 ABC，再分别以点 A，B，C 为圆心，线段 AB 长为半径画圆弧，便得到莱洛三角形．如图所示，已知 $AB=2$，O 为 BC 中点，点 P，Q 分别在弧 AC，弧 AB 上，设 $\angle PBC=\angle ACQ=\theta$.

(1)当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时，求 $|\overrightarrow{PQ}|$；

(2)求 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 的取值范围.



22．(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=e^{x-2}-a(x-1)(a\in R)$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 极值点的个数；

（2）若 $f(x)$ 有两个零点，证明：$a^2-a\ln a-1>0$.

高三数学练习（六）答案

1-8　CACD　CCCD

9-12　AD　BC　ACD　ACD　13.　4 或-1　14. $-\dfrac{3}{4}$　15.　4　16.　8;3

17.

（1）$\overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\lambda}{5}\overrightarrow{AD}$，由$B,P,D$三点共线$\Rightarrow \dfrac{2}{5}+\dfrac{\lambda}{5}=1\Rightarrow \lambda=3$.

（2）由$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow\left(\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}\right)\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=0$

$\Rightarrow\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}^2+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}^2=0\Rightarrow bc\cdot\cos A-2c^2+b^2=0$

$\Rightarrow bc\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-2c^2+b^2=0\Rightarrow b^2+c^2-a^2-4c^2+2b^2=0$

$\Rightarrow 3b^2-3c^2=a^2\Rightarrow 3(b^2-c^2)=a^2$，$a^2+b^2-2ab\cos C=c^2$，

$3(2ab\cos C-a^2)=a^2$，$6ab\cos C=4a^2$，$3b\cos C=2a$，

$3\sin B\cos C=2\sin A=2(\sin B\cos C+\cos B\sin C)$，$\sin B\cos C=2\cos B\sin C$

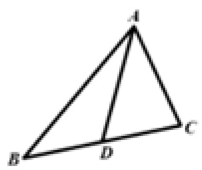
$\Rightarrow\tan B=2\tan C$.

18.

（1）$2\sin C\cos C-\sin C\cos A=\sin A\cos C$

$\Rightarrow 2\sin C\cos C=\sin(A+C)=\sin B$，$2c\cos C=b\Rightarrow\cos C=\dfrac{1}{4}$.

在△ABC中，$a^2+4-2a\cdot 2\cdot\dfrac{1}{4}=16\Rightarrow a^2-a-12=0$

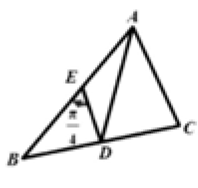


$\Rightarrow(a+3)(a-4)=0\Rightarrow a=4$.

$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2=\dfrac{1}{4}\left(c^2+b^2+2bc\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$

$=\dfrac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)=\dfrac{1}{4}(8+32-16)=6\Rightarrow AD=\sqrt{6}$.

（2）$\cos B=\dfrac{16+16-4}{2\times4\times4}=\dfrac{7}{8}$，$BD=\dfrac{2}{3}BC=\dfrac{8}{3}$，$\sin B=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$，



在△BDE中，$\dfrac{ED}{\frac{\sqrt{15}}{8}}=\dfrac{\frac{8}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，$\Rightarrow ED=\dfrac{\sqrt{30}}{3}$.

19

（1）证明：$\because$ 平面 $ABCD \perp$ 平面 $ABEF$，平面 $ABCD \cap$ 平面 $ABEF = AB$，

$AF \subset$ 平面 $ABEF$，$AF \perp AB$，$\therefore AF \perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore AF \perp DG$，

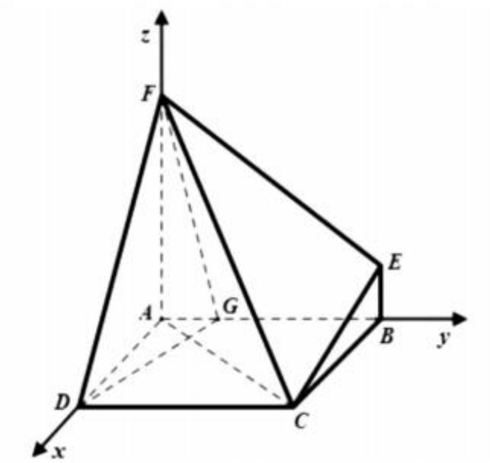
在 $\triangle ACD$ 与 $\triangle GDA$ 中，由 $\dfrac{AD}{AG} = \dfrac{CD}{AD} = 2$，$\angle ADC = \angle GAD = 90^\circ$，

$\therefore \triangle ACD \backsim \triangle GDA$，$\therefore \angle DAC = \angle AGD$，设 AC, DG 交于点 M，

$\therefore \angle GMC = \angle AGD + \angle CAG = \angle DAC + \angle CAG = 90^\circ$，

$\therefore DG \perp AC$，$\because AF \cap AC = A$，$\therefore DG \perp$ 平面 ACF，$\because DG \subset$ 平面 DFG，

$\therefore$ 平面 $DFG \perp$ 平面 ACF.



$\therefore \overrightarrow{DF} = (-2,0,4)$，$\overrightarrow{DG} = (-2,1,0)$，$\overrightarrow{CE} = (-2,0,1)$，$\overrightarrow{EF} = (0,-4,3)$，

设平面 DFG 和平面 CEF 的一个法向量分别为 $\overrightarrow{n_1} = (x_1, y_1, z_1)$，$\overrightarrow{n_2} = (x_2, y_2, z_2)$，

$$\therefore \begin{cases} \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{DF} = 0 \\ \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{DG} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + 4z_1 = 0 \\ -2x_1 + y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_1} = (2,4,1),$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{CE} = 0 \\ \overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x_2 + z_2 = 0 \\ -4y_2 + 3z_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_2} = (2,3,4),$$

设平面 DFG 与平面 CEF 所成锐二面角为 θ，

$$\therefore \cos\theta = \left| \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \left|\overrightarrow{n_2}\right|} \right| = \frac{4+12+4}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{29}} = \frac{20\sqrt{609}}{609}.$$

20.

（1）因为 $2a\sin A=(2b+c)\sin B+(2c+b)\sin C$ ，

根正弦定理得 $2a^2=(2b+c)b+(2c+b)c$ ，所以 $b^2+c^2-a^2=-bc$ ，

由余弦定理可得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$.

又 $A\in(0,\pi)$ ，所以， $A=\dfrac{2\pi}{3}$.

（2）由（1）知 $A=\dfrac{2\pi}{3}$ ，又 $\sin B+\sin C=1$ ，得 $\sin B+\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-B\right)=1$ ，

即 $\sin B+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B-\dfrac{1}{2}\sin B=\dfrac{1}{2}\sin B+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B=\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$ ，

因为 $B\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ ，则 $\dfrac{\pi}{3}<B+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{2\pi}{3}$ ，

所以 $B+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$ 即 $B=\dfrac{\pi}{6}$ ，则 $C=\dfrac{\pi}{6}$ ，

则 $\triangle ABC$ 为等腰钝角三角形.

（3）由 $a=2, A=\dfrac{2\pi}{3}$ 及余弦定理知 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-bc$

$\geq(b+c)^2-\dfrac{(b+c)^2}{4}=\dfrac{3(b+c)^2}{4}$ ，则 $(b+c)^2\leq\dfrac{16}{3}$ ，知 $(b+c)_{\max}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ ，

当且仅当 $b=c=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立，所以 $a+b+c\leq 2+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

21

（1）当$\theta=\dfrac{\pi}{6}$时，$\angle QMP=\angle BMC=\dfrac{2\pi}{3}$，

$BM=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$MP=MQ=2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$\therefore QP=\sqrt{3}\left(2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)=2\sqrt{3}-2$.

（2）$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP})\cdot(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CQ})$

$=-1+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}$

$=-1+2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)+2\cos\theta+2\times2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$=2\left(\dfrac{1}{2}\cos\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)+2\cos\theta-3$

$=\sqrt{3}\sin\theta+3\cos\theta-3=2\sqrt{3}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)-3,\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$，

$\dfrac{\pi}{3}\le\theta+\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{2\pi}{3}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\le\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)\le1$，

$\therefore 0\le\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\le2\sqrt{3}-3$.

.

22.

（1）由 $f(x)=e^{x-2}-a(x-1)(a\in\mathbf{R})$ 得：$f'(x)=e^{x-2}-a$，

当 $a\le 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，无极值点.

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得：$x=\ln a+2$.

$\therefore$ 当 $x\in(-\infty,\ln a+2)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(\ln a+2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a+2)$ 上单调递减，在 $(\ln a+2,+\infty)$ 上单调递增.

$\therefore f(x)$ 有且仅有一个极小值点 $x=\ln a+2$，无极大值点.

综上所述：当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 无极值点；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 有且仅有一个极小值点 $x=\ln a+2$，无极大值点.

（2）由（1）可知：当 $a>0$ 时，$f(x)$ 有一个极小值点 $x=\ln a+2$，且极小值为

$f(\ln a+2)=e^{\ln a}-a(\ln a+1)=-a\ln a$.

当 $0<a<1$ 时，$f(\ln a+2)=-a\ln a>0$，函数 $f(x)$ 没有零点；

当 $a=1$ 时，$f(\ln a+2)=-a\ln a=0$，函数 $f(x)$ 只有一个零点；

当 $a>1$ 时，$f(\ln a+2)=-a\ln a<0$，又 $f(0)=e^{-2}+a>0$，

$\therefore \exists x_1\in(0,\ln a+2)$，使得 $f(x_1)=0$；

又 $f(4+a)=e^{2+a}-a(3+a)>(2+a)^2-3a-a^2=4+a>0$，

$\therefore \exists x_2\in(\ln a+2,4+a)$，使得 $f(x_2)=0$，$\therefore$ 当 $a>1$ 时，$f(x)$ 有两个零点.

记 $g(a)=a^2-a\ln a-1(a>1)$，则 $g'(a)=2a-\ln a-1$.

记 $h(a)=2a-\ln a-1(a>1)$，则 $h'(a)=2-\dfrac{1}{a}=\dfrac{2a-1}{a}$.

$\because a>1$，$\therefore h'(a)>0$，$\therefore h(a)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，$\therefore h(a)>h(1)=1$，

即 $g'(a)>1$，$\therefore g(a)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore g(a)>g(1)=0$，

即 $a^2-a\ln a-1>0$ 恒成立，原不等式得证.