班级______ 学号______ 姓名______ 得分______

仪征中学2019年高考数学全真模拟试卷三

数学Ⅰ试题

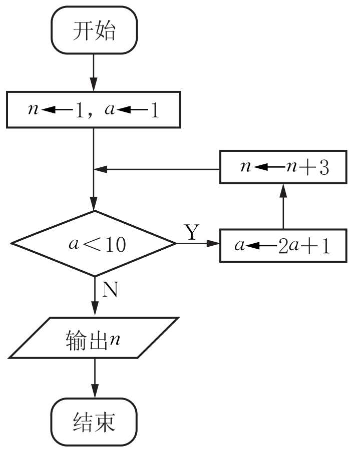
一、填空题:本大题共14小题,每小题5分,共计70分.请把答案填写在答题卡相应位置上.

1. 已知集合 $A=\{1,3\}$,$B=\{-1,0,3\}$,则 $A\cap B=$ **$\{3\}$** .

2. 把复数 z 的共轭复数记作 $\bar{z}$,若 $z=2-\mathrm{i}$,其中 i 为虚数单位,则 $(\bar{z}-2\mathrm{i})\cdot z$ 的模为 **5** .

3. 在平面直角坐标系中,若 $F(5,0)$ 是双曲线 $\dfrac{x^2}{m}-\dfrac{y^2}{m-7}=1$ 的一个焦点,则实数 m 的值为 **16** .

4. 某校因国庆节放假,需要利用周六上午的四节课补上语文、数学、英语和体育课各一节,每门科目都可以随机排在四节课中的任何一节,则体育不排在第一节课和第四节课的概率为 $\mathbf{\dfrac{1}{2}}$.



(第5题)

5. 执行如图所示的算法流程图,则输出的 n 的值为 **10** .

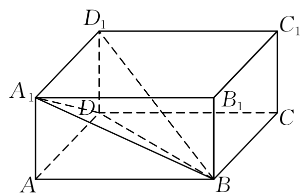
6. 若“$-1<x\leqslant a$”是“$3^{2x-4}<1$”的充分不必要条件,则实数 a 的取值范围是 **$(-1,2)$** .

解析 解 $3^{2x-4}<1$ 得 $x<2$.因为“$-1<x\leqslant a$”是“$x<2$”的充分不必要条件,所以 $-1<a<2$.

7. 若函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-a\mathrm{e}^{-x}$(e 为自然对数的底数)为奇函数,则 $f(-\ln 2)$ 的值为 $\mathbf{-\dfrac{3}{2}}$.

解析 因为 $f(x)=\mathrm{e}^x-a\mathrm{e}^{-x}$ 为奇函数,所以 $f(-x)=-f(x)$,即 $\mathrm{e}^{-x}-a\mathrm{e}^{x}=-\mathrm{e}^x+a\mathrm{e}^{-x}$,所以 $a=1$,因此 $f(-\ln 2)=\mathrm{e}^{-\ln 2}-\mathrm{e}^{\ln 2}=\dfrac{1}{2}-2=-\dfrac{3}{2}$.

8. 如图,在正四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=3$ cm,$AA_1=\sqrt{2}$ cm,则三棱锥 $D_1\text{-}A_1BD$ 的外接球的体积为 $\mathbf{\dfrac{20\sqrt{5}}{3}\pi\ cm^3}$.



(第8题)

解析 三棱锥 $D_1\text{-}A_1BD$ 即为三棱锥 $B\text{-}A_1D_1D$,由正四棱柱的性质知 $BA\perp$ 平面 A_1D_1D,所以三棱锥 $D_1\text{-}A_1BD$ 的外接球为四棱锥

$B\text{-}AA_1D_1D$ 的外接球，即为正四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的外接球.

9. 在$\triangle ABC$中，$AB=AC=2$，$BC=2\sqrt{3}$，点 D 满足 $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{BD}$，则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}$的值为 $\underline{\boldsymbol{-\frac{4}{3}}}$.

解析 在$\triangle ABC$中，$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\cdot AB\cdot BC}=\frac{2^2+(2\sqrt{3})^2-2^2}{2\times 2\times 2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 因为 $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{BD}$，所以 $\overrightarrow{DC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. 而 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{2}{9}\overrightarrow{BC}^2=\frac{2}{3}\times 2\times 2\sqrt{3}\times\cos(\pi-B)+\frac{2}{9}\times(2\sqrt{3})^2=-4+\frac{8}{3}=-\frac{4}{3}$.

10. 已知 $\alpha+\beta=\frac{2\pi}{3}$，$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}=\frac{1}{4}$，则 $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$ 的值为 $\underline{\boldsymbol{\frac{1}{6}}}$.

解析 因为 $\alpha+\beta=\frac{2\pi}{3}$，所以 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{3}$，故 $\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=\frac{1}{2}$，即 $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2}$. 因为 $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}=\frac{1}{4}$，所以 $\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}=\frac{1}{4}$，即 $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$，所以 $4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2}$，即 $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\frac{1}{6}$.

11. 已知数列$\{a_n\}$是公比为 q 的等比数列，$\frac{1}{a_1}-\frac{3}{a_2}+\frac{3}{a_3}=\frac{1}{3}$，$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{3}{a_2a_3}-\frac{3}{a_1a_3}=\frac{2}{9}$，则公比 q 的取值集合为 $\underline{\boldsymbol{\left\{2,\frac{3}{2}\right\}}}$.

解析 因为 $\frac{1}{a_1}-\frac{3}{a_2}+\frac{3}{a_3}=\frac{1}{3}$，所以 $\frac{1}{a_1}+\frac{3}{a_3}=\frac{1}{3}+\frac{3}{a_2}$，故 $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{3}{a_2a_3}-\frac{3}{a_1a_3}=\frac{1}{a_2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{3}{a_3}\right)-\frac{3}{a_2^2}=\frac{1}{3a_2}+\frac{3}{a_2^2}-\frac{3}{a_2^2}=\frac{1}{3a_2}=\frac{2}{9}$，解得 $a_2=\frac{3}{2}$，所以 $\frac{1}{a_1}-\frac{3}{a_2}+\frac{3}{a_3}=\frac{q}{\frac{3}{2}}-2+\frac{3}{\frac{3}{2}q}=\frac{1}{3}$，化简得 $2q^2-7q+6=0$，解得 $q=2$ 或$\frac{3}{2}$.

12. 若 a，b 是关于 x 的方程 $\sin\theta\cdot x^2+\cos\theta\cdot x-2-\cos\theta=0$ 的两个不相等的实数根，直线 l 过点 $A(a-1,a^2)$，$B(b-1,b^2)$，则圆 $x^2+y^2=1$ 上到直线 l 的距离为$\sqrt{2}$的点有 $\underline{\textbf{2}}$ 个.

解析 因为 a，b 是方程 $\sin\theta\cdot x^2+\cos\theta\cdot x-2-\cos\theta=0$ 的两个不相等的实数

根，所以 $a+b=-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$，$ab=-\dfrac{2+\cos\theta}{\sin\theta}$. 因为 $k_l=\dfrac{b^2-a^2}{(b-1)-(a-1)}=a+b$，所以直线 l：$y-a^2=(a+b)[x-(a-1)]$，代入化简得 $\sin\theta\cdot y+\cos\theta\cdot x=2$，所以圆心(0，0)到直线 l 的距离 $d=\dfrac{2}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}=2$，故直线 l 与圆相离.因为圆上的点到直线 l 的最小距离为 $2-1=1<\sqrt{2}$，所以圆上有 2 个点到直线 l 的距离为 $\sqrt{2}$.

13. 在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{3}{b+c}+\dfrac{4}{a+3b+2c}=0$，则当 $\cos A$ 取得最小值时，$\dfrac{b}{c}=$ $\underline{\ \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{10}}{4}}\ }$.

解析 因为 $\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{3}{b+c}+\dfrac{4}{a+3b+2c}=0$，所以 $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}=\dfrac{4}{b+c}-\dfrac{4}{a+3b+2c}$，即 $\dfrac{a+2b+c}{(a+b)(b+c)}=\dfrac{4(a+2b+c)}{(b+c)(a+3b+2c)}$，亦即 $4a+4b=a+3b+2c$，所以 $a=\dfrac{2c-b}{3}$. 因为 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{9b^2+9c^2-(2c-b)^2}{18bc}=\dfrac{4b}{9c}+\dfrac{5c}{18b}+\dfrac{2}{9}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{4b}{9c}\cdot\dfrac{5c}{18b}}+\dfrac{2}{9}=\dfrac{2\sqrt{10}+2}{9}$$\left(\text{当且仅当}\dfrac{4b}{9c}=\dfrac{5c}{18b}，\text{即}\dfrac{b}{c}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}\text{ 时取“=”}\right)$.

14. 若函数 $f(x)=x^2+ax+b+\dfrac{a}{x}+\dfrac{1}{x^2}(a，b\in\mathbf{R})$ 在 $(-\infty，0)\cup(0，+\infty)$ 上有零点，则 a^2+b^2 的最小值为 $\underline{\ \boldsymbol{\dfrac{4}{5}}\ }$.

解析 $f(x)=x^2+ax+b+\dfrac{a}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+a\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+b=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+a\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+b-2$. 令 $t=x+\dfrac{1}{x}$，则 $t\in(-\infty，-2]\cup[2，+\infty)$. 记 $g(t)=t^2+at+b-2$，$t\in(-\infty，-2]\cup[2，+\infty)$. 因为函数 $f(x)$ 有零点，所以 $g(t)=0$ 有实数根，故 $\Delta=a^2-4(b-2)\geqslant 0$，且 $g(-2)\leqslant 0$ 或 $g(2)\leqslant 0$，即 $-2a+b+2\leqslant 0$ 或 $2a+b+2\leqslant 0$，画出可行域可知原点(0，0)到点(a，b)的距离的最小值为原点(0，0)到直线 $-2a+b+2=0$ 或 $2a+b+2=0$ 的距离，为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 a^2+b^2 的最小值为 $\dfrac{4}{5}$.

二、解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分.请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. （本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)$（$\omega>0$，$x\in\mathbf{R}$），$A$，$B$ 是 $f(x)$ 的图象与直线 $y=1$ 的两个交点，且 AB 的最小值为 $\dfrac{\pi}{3}$.

(1) 求 ω 的值；

(2) 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，再将所得图象上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍，纵坐标不变，得到函数 $g(x)$ 的图象，若 $g\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{3}$，$\alpha\in(0,\pi)$，求 $g(\alpha)$的值.

解析 (1) 由 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)=1$ 得 $\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$，

所以 $\omega x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 或 $\omega x+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

设 A，B 两点的横坐标分别为 x_1，x_2.

因为 AB 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$，

所以 $\left|\left(\omega x_1+\frac{\pi}{3}\right)-\left(\omega x_2+\frac{\pi}{3}\right)\right|=\omega|x_1-x_2|=\omega\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}$，解得 $\omega=2$.(6 分)

(2) 由(1)知 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

将 $f(x)$的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，

则所得图象对应的函数解析式为 $y=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=2\cos 2x$；

再将所得图象上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍，纵坐标不变，
则所得图象对应的函数解析式为 $g(x)=2\cos x$.

因为 $g\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{3}$，$\alpha\in(0,\pi)$，

所以 $2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{3}$，即 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}$.

因为 $\alpha\in(0,\pi)$，所以 $\alpha+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$.

因为 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}>0$，所以 $\alpha+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以 $\cos\alpha=\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1+2\sqrt{6}}{6}$，

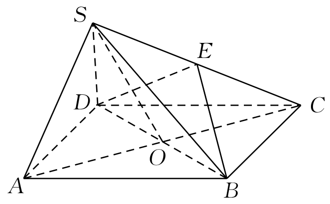
即 $g(\alpha)=\frac{1+2\sqrt{6}}{3}$.(14 分)

16. (本小题满分 14 分)

如图,在四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 中,四边形 $ABCD$ 为平行四边形,AC 与 BD 相交于点 O,E 为棱 SC 上一点,且 $SA\parallel$ 平面 BDE,$AC=2SO$,$SA\perp CD$.

(1) 求证:$SE=EC$;

(2) 求证:平面 $SCD\perp$ 平面 BDE.



(第 16 题)

证明 (1) 连接 OE.

因为 $SA\parallel$ 平面 BDE,$SA\subset$ 平面 SAC,平面 $SAC\cap$ 平面 $BDE=OE$,

所以 $SA\parallel OE$.

因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形,AC 与 BD 相交于点 O,

所以 $OA=OC$.

在△SAC 中,$SA\parallel OE$,$OA=OC$,

所以 $SE=EC$.(7 分)

(2) 在△SAC 中,$OA=OC$,$AC=2SO$,

所以 $SA\perp SC$.

又 $SA\perp CD$,$SA\parallel OE$,

所以 $OE\perp SC$,$OE\perp CD$.

又 $SC\cap CD=C$,SC,$CD\subset$ 平面 SCD,

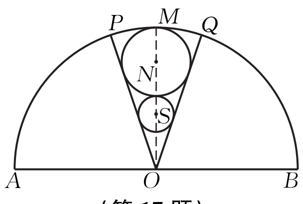
所以 $OE\perp$ 平面 SCD.

又 $OE\subset$ 平面 BDE,

所以平面 $SCD\perp$ 平面 BDE.(14 分)

17. (本小题满分 14 分)

如图,有一块半径为 R 的半圆形广场,M 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点.现要在该广场内以 OM 为中轴线划出一块扇形区域 OPQ,并在扇形区域内建两个圆形花圃(圆 N 和圆 S),使得圆 N 内切于扇形 OPQ,圆 S 与扇形 OPQ 的两条半径相切,且与圆 N 外切.



(第 17 题)

(1) 设 $\angle POM=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$,试将圆 S 的半径 y 表示成 θ 的函数;

(2) 求圆 S 的半径 y 的最大值.

解析 (1) 设圆 N 的半径为 a,则 $\begin{cases}(R-a)\sin\theta=a,\\(R-2a-y)\sin\theta=y,\end{cases}$

则 $y=\dfrac{R\sin\theta(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)^2}$,$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.(6 分)

(2) 令 $1+\sin\theta=t(1<t<2)$,

则 $y=\frac{R(t-1)(2-t)}{t^2}=R\left(-1+\frac{3}{t}-\frac{2}{t^2}\right)$，

当 $\frac{1}{t}=\frac{3}{4}$，即 $t=\frac{4}{3}$ 时，$y_{\max}=\frac{R}{8}$.

故圆 S 的半径 y 的最大值为 $\frac{R}{8}$.（14 分）

18.（本小题满分 16 分）

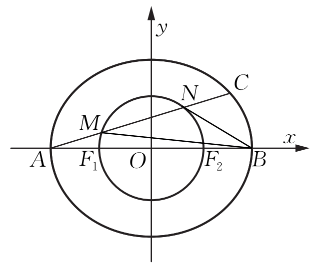
如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，离心率为 $\frac{1}{2}$，左焦点到左准线的距离为 3.

（1）求椭圆 E 的标准方程.

（2）若椭圆 E 的左、右顶点分别为 A，B，圆 O 是以线段 F_1F_2 为直径的圆，过点 A 的直线与椭圆 E 交于另一点 C，交圆 O 于点 M，N（点 M 在点 N 的左边）.

① 若 $AM=CN$，求直线 AC 的方程；

② 求 $|\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BN}|$ 的取值范围.



（第 18 题）

解析（1）设焦距为 $2c(c>0)$.

由题意知 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，$\frac{a^2}{c}-c=3$，

解得 $a=2$，$c=1$，所以 $b=\sqrt{3}$，

所以椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.（3 分）

（2）①由题意知圆 O 的方程为 $x^2+y^2=1$，$A(-2,0)$.

设 $C(x_0,y_0)$，AC 的中点为 T，MN 的中点为 S，直线 AC：$y=k(x+2)$（k 一定存在）.

联立 $\begin{cases}y=k(x+2),\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-12=0$，

则 $x_T=\frac{-8k^2}{3+4k^2}$，$y_T=\frac{6k}{3+4k^2}$，

联立 $\begin{cases}y=k(x+2),\\ x^2+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(1+k^2)x^2+4k^2x+4k^2-1=0$，

则 $x_S=\frac{-2k^2}{1+k^2}$，$y_S=\frac{2k}{1+k^2}$.

因为 $AM=CN$，所以点 T 与点 S 重合，

所以 $\frac{-8k^2}{3+4k^2}=\frac{-2k^2}{1+k^2}$，解得 $k=0$，

此时直线 AC 的方程为 $y=0$.(10 分)

② 由题意知 $B(2,0)$,则 $|\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BN}|=2|\overrightarrow{BS}|=2\sqrt{\left(\frac{-2k^2}{1+k^2}-2\right)^2+\left(\frac{2k}{1+k^2}\right)^2}=$

$4\sqrt{\frac{4k^4+5k^2+1}{k^4+2k^2+1}}=4\sqrt{4-\frac{3}{k^2+1}}$.

因为直线 AC 与圆 O 相交,

所以圆心 O 到直线 AC 的距离 $d=\frac{2|k|}{\sqrt{1+k^2}}<1$,解得 $k^2<\frac{1}{3}$,

所以 $|\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BN}|$ 的取值范围是 $[4,2\sqrt{7})$.(16 分)

19. (本小题满分 16 分)

已知函数 $f(x)=x\ln x+ax|x-1|$ $(a\in\mathbf{R})$.

(1) 若 $a=0$,求 $f(x)$的单调区间;

(2) 若 $a>0$,求 $f(x)$的零点个数;

(3) 若关于 x 的不等式 $f(x)<\mathrm{e}x$ 对任意的 $x\in(0,\mathrm{e}]$ 恒成立,其中 e 为自然对数的底数,求 a 的取值范围.

解析 (1) 当 $a=0$ 时,$f(x)=x\ln x$,则 $f'(x)=\ln x+1$.

令 $f'(x)>0$,则 $x>\frac{1}{\mathrm{e}}$;

令 $f'(x)<0$,则 $0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$.

所以函数 $f(x)$的单调增区间为 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$,单调减区间为 $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.(3 分)

(2) $f(x)=x\ln x+ax|x-1|=x(\ln x+a|x-1|)$.

因为 $x>0$,所以函数 $f(x)$的零点即为函数 $g(x)=\ln x+a|x-1|$ 的零点.

因为当 $x=1$ 时,$g(x)=0$,所以 $x=1$ 是 $g(x)=\ln x+a|x-1|$ 的零点.

① 当 $x>1$ 时,$g(x)=\ln x+ax-a$,则 $g'(x)=\frac{1}{x}+a$.

因为 $a>0$,所以 $g'(x)>0$,

所以 $g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增,所以 $g(x)>g(1)=0$,

所以当 $x>1$ 时,$g(x)$没有零点.

② 当 $0<x<1$ 时,$g(x)=\ln x-ax+a$,则 $g'(x)=\frac{1}{x}-a$.

因为 $0<x<1$,所以 $\frac{1}{x}>1$.

当 $0<a\leqslant 1$ 时,$g'(x)>0$,

所以 $g(x)$在$(0,1)$上单调递增,

所以 $g(x)<g(1)=0$，

所以当 $0<x<1$ 时，$g(x)$没有零点.

当 $a>1$ 时，$g(x)$在 $\left(0,\ \frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{a},\ 1\right)$ 上单调递减.

又当 $x\in\left(\frac{1}{a},\ 1\right)$ 时，$g(x)>g(1)=0$，故 $g(x)$没有零点；

当 $x\in\left(0,\ \frac{1}{a}\right]$ 时，$g(x)$连续，且 $g\left(\frac{1}{a}\right)>g(1)=0$，$g(\mathrm{e}^{-a})=\ln\mathrm{e}^{-a}-a\cdot\mathrm{e}^{-a}+a=-a\cdot\mathrm{e}^{-a}<0$，$g(x)$ 在 $\left(0,\ \frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，所以 $g(x)$在 $\left(0,\ \frac{1}{a}\right)$ 上有唯一零点.

综上，当 $0<a\leqslant 1$ 时，$f(x)$有唯一零点；当 $a>1$ 时，$f(x)$有两个不同的零点.(10 分)

(3) 因为 $f(x)<\mathrm{e}x$ 对任意的 $x\in(0,\ \mathrm{e}]$ 恒成立，

所以 $\ln x+a\mid x-1\mid<\mathrm{e}$ 在 $x\in(0,\ \mathrm{e}]$ 上恒成立.

令 $g(x)=\ln x+a\mid x-1\mid$，则 $g(\mathrm{e})<\mathrm{e}$，所以 $a<1$.

① 当 $a\leqslant 0$ 时，$\ln x+a\mid x-1\mid\leqslant\ln x$，若 $0<x\leqslant\mathrm{e}$，则 $\ln x\leqslant 1<\mathrm{e}$，此时原不等式恒成立.

② 当 $0<a<1$ 时，$g(x)=\begin{cases}\ln x+a(x-1),\ 1\leqslant x\leqslant\mathrm{e},\\ \ln x+a(1-x),\ 0<x<1.\end{cases}$

若 $1\leqslant x\leqslant\mathrm{e}$，则 $g(x)=\ln x+a(x-1)$，故 $g'(x)=\frac{1}{x}+a$.

因为 $a>0$，所以 $g'(x)>0$，

所以 $g(x)$在 $[1,\ \mathrm{e}]$ 上单调递增，

所以 $[g(x)]_{\max}=g(\mathrm{e})<\mathrm{e}$，原不等式恒成立.

若 $0<x<1$，则 $g(x)=\ln x+a(1-x)$，故 $g'(x)=\frac{1}{x}-a$.

因为 $0<x<1$，所以 $\frac{1}{x}>1$，所以 $g'(x)=\frac{1}{x}-a>0$，

所以 $g(x)$在$(0,\ 1)$上单调递增，

所以 $g(x)<g(1)=0<\mathrm{e}$，原不等式恒成立.

综上，a 的取值范围是$(-\infty,\ 1)$.(16 分)

20. (本小题满分 16 分)

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=1$，$2S_n=a_n\cdot a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式.

(2) 若 $b_n=(-1)^n\frac{2n+1}{a_n\cdot a_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和.

(3) 若数列$\{c_n\}$的通项公式为 $c_n=\frac{1}{k\cdot a_n+2}(k\in\mathbf{N}^*)$，是否存在正整数 k，使数列$\{c_n\}$

中的任意一项都可以表示为数列$\{c_n\}$中的某两项之和？若存在，求出 k 的值；若不存在，请说明理由.

解析 (1) 因为 $a_1=1$, $2S_n=a_n\cdot a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$,

所以 $2S_{n-1}=a_{n-1}\cdot a_n(n\geqslant 2)$,

所以 $2a_n=a_n\cdot a_{n+1}-a_{n-1}\cdot a_n$.

当 $a_n=0$ 时, $S_n=0$,则 $S_1=a_1=0$, 与 $a_1=1$ 矛盾,故舍去,

所以 $a_n\neq 0$, 则 $a_{n+1}-a_{n-1}=2$, 即 $a_{n+2}-a_n=2(n\geqslant 1)$,

故数列 $\{a_{2k-1}\}$, $\{a_{2k}\}(k\in\mathbf{N}^*)$ 为等差数列.

当 $n=1$ 时, $2S_1=a_1\cdot a_2$, $a_1=1$, 所以 $a_2=2$.

当 $n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时, $a_n=a_{2k}=2+(k-1)\cdot 2=2k=n$;

当 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$ 时, $a_n=a_{2k-1}=1+(k-1)\cdot 2=2k-1=n$.

综上, $a_n=n(n\in\mathbf{N}^*)$.(4 分)

(2) $b_n=(-1)^n\dfrac{2n+1}{a_n\cdot a_{n+1}}=(-1)^n\dfrac{2n+1}{n\cdot(n+1)}=(-1)^n\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)$.

设$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n,

当 n 为偶数时, $T_n=-\left(1+\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)-\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)=-1+\dfrac{1}{n+1}=-\dfrac{n}{n+1}$;

当 n 为奇数时, $T_n=-\left(1+\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)-\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\right)+\cdots-\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)=-1-\dfrac{1}{n+1}=-\dfrac{n+2}{n+1}$.

综上, $T_n=\begin{cases}-\dfrac{n+2}{n+1}, n\text{ 为奇数},\\ -\dfrac{n}{n+1}, n\text{ 为偶数}.\end{cases}$ (8 分)

(3) 存在正整数 k,使数列$\{c_n\}$中的任意一项都可以表示为数列$\{c_n\}$中的某两项之和.

理由如下:由(1)可知 $c_n=\dfrac{1}{kn+2}(k, n\in\mathbf{N}^*)$.

假设 $c_n=c_m+c_t(m, t\in\mathbf{N}^*)$,

则 $\dfrac{1}{kn+2}=\dfrac{1}{km+2}+\dfrac{1}{kt+2}$,

移项得 $\dfrac{1}{kn+2}-\dfrac{1}{km+2}=\dfrac{1}{kt+2}$,

所以 $\dfrac{k(m-n)}{(kn+2)(km+2)}=\dfrac{1}{kt+2}$,

即 $kt+2=\dfrac{(kn+2)(km+2)}{k(m-n)}$.

取 $m=n+1$,

则 $kt+2=\dfrac{(kn+2)(km+2)}{k}=\dfrac{k^2mn+2k(m+n)+4}{k}=kmn+2(m+n)+\dfrac{4}{k}$.

因为 k, t, m, n 都为正整数,所以 $\dfrac{4}{k}$ 为正整数.

当 $k=1$ 时, $m=n+1$, 则 $t=mn+2(m+n)+2=n^2+5n+4$, 符合题意;

当 $k=2$ 时, $m=n+1$, 则 $t=mn+(m+n)=n^2+3n+1$, 符合题意;

当 $k=4$ 时, $m=n+1$, 则 $4t+2=(2n+1)(2m+1)=(2n+1)(2n+3)$, 右边为奇数,左边为偶数,不符合题意.

综上,当 $k=1$ 时, $\{c_n\}$ 中的任意一项 c_n 都可表示为 c_{n+1} 和 c_{n^2+5n+4} 的和;当 $k=2$ 时, $\{c_n\}$ 中的任意一项 c_n 都可表示为 c_{n+1} 和 c_{n^2+3n+1} 的和.(16 分)

数学Ⅱ(附加题)

21.【选做题】本题包括 A、B、C 三小题,请选定其中两小题,并在相应的答题区域内作答.若多做,则按作答的前两小题评分.解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

A. [选修 4-2:矩阵与变换](本小题满分 10 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&-1\\1&1\end{bmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{AB}$;

(2) 求点 $P(1, 3)$在矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 对应的变换作用下得到的点 Q 的坐标.

解析 (1) $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1\\2&2\end{bmatrix}$.(5 分)

(2) 因为 $\boldsymbol{AB}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\8\end{bmatrix}$, 所以点 Q 的坐标为$(-1, 8)$.(10 分)

B. [选修 4-4:坐标系与参数方程](本小题满分 10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中,已知直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=2t,\\y=a-t\end{cases}$($t$ 为参数),曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=1+\sqrt{5}\cos\theta,\\y=\sqrt{5}\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数).若直线 l 与曲线 C 相交,求实数 a 的取值范围.

解析 因为直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=2t,\\y=a-t\end{cases}$($t$ 为参数),所以其普通方程为 $x+2y-2a=0$.

因为曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\sqrt{5}\cos\theta,\\ y=\sqrt{5}\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数)，所以其普通方程为 $(x-1)^2+y^2=5$.

因为直线 l 与曲线 C 相交，所以 $d=\dfrac{|1-2a|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5}$，解得 $-2<a<3$.

所以实数 a 的取值范围是 $(-2,3)$.(10 分)

【必做题】第 22 题、第 23 题，每小题 10 分，共计 20 分.请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

22. (本小题满分 10 分)

在一个质地均匀的小正方体的六个面中，有四个面标有数字 1，两个面标有数字 2.将该小正方体连续抛掷三次，记下向上一面上的数字.

(1) 求抛掷三次记下的数字不全相同的概率；

(2) 设 X 表示抛掷三次记下的数字之和，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$.

解析 由题意可知抛掷小正方体一次，记下的数字为 1 的概率是 $\dfrac{2}{3}$，记下的数字为 2 的概率是 $\dfrac{1}{3}$.

(1) 设"抛掷三次记下的数字不全相同"为事件 A，则 A 有 1，2，2 和 1，1，2 两种可能，所以 $P(A)=C_3^1\times\dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+C_3^1\times\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{2}{3}$.(4 分)

(2) 由题意可知 X 的所有可能值为 3，4，5，6，

则 $P(X=3)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$,

$P(X=4)=C_3^1\times\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$,

$P(X=5)=C_3^1\times\dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{2}{9}$,

$P(X=6)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{1}{27}$,

所以 X 的分布列如下：

X	3	4	5	6
P	$\dfrac{8}{27}$	$\dfrac{4}{9}$	$\dfrac{2}{9}$	$\dfrac{1}{27}$

所以 $E(X)=3\times\dfrac{8}{27}+4\times\dfrac{4}{9}+5\times\dfrac{2}{9}+6\times\dfrac{1}{27}=4$.(10 分)

23. 已知抛物线 C：$y^2=4x$，过直线 l：$x=-2$ 上任意一点 A 向抛物线 C 引两条切线 AS，AT(切点为 S，T，且点 S 在 x 轴上方).

(1) 求证：直线 ST 过定点，并求出该定点；

(2) 抛物线 C 上是否存在点 B，使得 $BS\perp BT$?

解：(1) 设 $S(x_1，y_1)$，$T(x_2，y_2)$，$A(-2，t)$.

当 $y>0$ 时，$y=2\sqrt{x}$，则 $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，

∴ 直线 AS 的方程为 $y-y_1=\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}(x-x_1)$，................................1

代入点 $A(-2，t)$得 $t-y_1=\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}(-2-x_1)$，

∴ $\sqrt{x_1}t-\sqrt{x_1}y_1=-2-x_1$.

又 $y_1=2\sqrt{x_1}$，

∴ $\dfrac{1}{2}y_1t-2x_1=-2-x_1$，即 $x_1-\dfrac{1}{2}y_1t-2=0$............................3

同理可得 $x_2-\dfrac{1}{2}y_2t-2=0$，

∴ 直线 ST：$x-\dfrac{1}{2}ty-2=0$，

∴ 直线 ST 过定点$(2，0)$. 5

(2) 由(1)可知直线 ST 过定点$(2，0)$，故可设 ST：$x=my+2$.

由$\begin{cases}x=my+2，\\ y^2=4x\end{cases}$ 得 $y^2-4my-8=0$，

∴ $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-8$.

设点 $B(x_0，y_0)$. ∵ $BS\perp BT$，∴ $\overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{BT}=0$，

∴ $(x_0-x_1)(x_0-x_2)+(y_0-y_1)(y_0-y_2)=0$，

即 $x_0^2-(x_1+x_2)x_0+x_1x_2+y_0^2-(y_1+y_2)y_0+y_1y_2=0$.

∵ $x_1x_2=\dfrac{1}{16}y_1^2y_2^2=4$，$x_1+x_2=m(y_1+y_2)+4=4m^2+4$，

∴ $x_0^2-(4m^2+4)x_0+y_0^2-4my_0-4=0$.

又 $y_0^2=4x_0$，

∴ $x_0^2-4m^2x_0-4my_0-4=0$，

∴ $x_0^2=m^2y_0^2+4my_0+4=(my_0+2)^2$，

∴ $x_0=my_0+2$ 或 $-x_0=my_0+2$...8

∵ 点 B 不在直线 ST 上，

∴ $\dfrac{1}{4}y_0^2+my_0+2=0$.

∵ $\Delta=m^2-2$，

∴ 当 $m\leqslant-\sqrt{2}$或 $m\geqslant\sqrt{2}$时，抛物线上存在点 B 满足条件；

当$-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$时，抛物线上不存在点 B 满足条件. 10