

镇江市 2021 届高三二年级第一学期期中考试

数学试题

(本试卷满分 150 分,考试时间 120 分钟)

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题意要求的

1. 已知数列 $a_n = n^2 - 6n + 5$, 则该数列中最小项的序号是
A. 3 B. 4 C. 5 D. 6
2. 若椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{m} = 1$ 与双曲线 $x^2 - 15y^2 = 15$ 的焦点相同, 则 m 的值为
A. 3 B. 4 C. 6 D. 9
3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 11 项和 $S_{11} = 88$, 则 $a_2 + a_{10} =$
A. 16 B. 17 C. 18 D. 19
4. 卢浮宫金字塔位于巴黎卢浮宫的主院拿破仑庭院, 由美籍华人建筑师设计, 已成为巴黎的城市地标。金字塔为正四棱锥造型, 四个侧面由几乎大小相同的玻璃块拼装而成, 能成为地下设施提供良好的采光, 创造性地解决了把古老宫殿改造成现代美术馆的一系列难题, 取得极大成功, 金字塔塔高 21 米, 底宽 34 米, 如果每块玻璃面积为 2.72 平方米, 不计安装中的损耗, 请你估算, 建造这座玻璃金字塔需要玻璃块的块数最接近的数为 ()
A. 575 B. 625 C. 675 D. 725
5. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, P 为 AC 上的动点, 则 PB_1 与平面 DA_1C_1 的位置关系是 ()
A. 线在面内 B. 平行 C. 相交 D. 不能确定
6. 抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线与双曲线 $4x^2 - y^2 = 1$ 的两条渐近线所围成的三角形面积为
A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. 4
7. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $\frac{S_6}{S_3} = 9$, 则 $\frac{a_4}{a_2}$ 的值为
A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. 4
8. 降雨量是气象部门观测的重要数据, 日降雨量是指一天内降落在地面单位面积雨水层的深度 (单位: 毫米)。我国古代就有关于降雨量测量方法的记载, 古代数学名著《数书九章》中有“天池盆测雨”题: 天池盆 (圆台形状) 盆口直径二尺八寸, 盆底直径为一尺二寸, 盆深一尺八寸。若盆中积水深九寸, 则平地降雨量是几寸 (注: 一尺等于十寸, 一寸等于 $\frac{10}{3}$ 厘米)? 已知某隧道的积水程度与日降水量的关系如下表所示:

日降雨量(单位:毫米)	[15, 40)	[40, 70)	[70, 120)	[120, 250)
隧道积水程度	一级	二级	三级	四级

如果某天该隧道的日降水量按照“天池盆测雨”题中数据计算, 则该隧道的积水程度为 ()

- A. 一级 B. 二级 C. 三级 D. 四级

二、多选题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项合题意要求.全部选对的得 5 分,有选错的得 0 分,部分选对的得 3 分.

9. 下列说法正确的有 ()

- A. 正三棱锥的三个侧面重心所确定的平面与底面平行
- B. 设 m 为圆锥的一条母线, 则在该圆锥底面圆中, 有且只有一条直径与 m 垂直
- C. 对于任意一个正棱柱, 都存在一个球, 使得该正棱柱的所有顶点都在此球面上
- D. 设 AB, CD 分别为圆柱上、下底面的弦, 则直线 AB, CD 间距离等于该圆柱母线长

10. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d \neq 0$. 其前 n 项和为 S_n , 且 $2a_1, S_8, S_9$ 成等差数列, 则下列四个选项中正确的有 ()

- A. $2a_5 + 3a_9 = S_8$
- B. $S_2 = S_7$
- C. S_5 最小
- D. $a_5 = 0$

11. 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的左、右焦点为 F_1, F_2 , 点 P 在椭圆上, 且不与椭圆的左、右顶点重合, 则下列关于 $\triangle PF_1F_2$ 的说法正确的有

- A. $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 $4 + 2\sqrt{2}$
- B. 当 $\angle PF_1F_2 = 90^\circ$ 时, $\triangle PF_1F_2$ 的边 $PF_1 = 2$
- C. 当 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$ 时, $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
- D. 椭圆上有且仅有 6 个点 P , 使得 $\triangle PF_1F_2$ 为直角三角形

12. 计算机病毒危害很大, 一直是计算机学家研究的对象. 当计算机内某文件被病毒感染后, 该病毒文件就不断地感染其他未被感染文件. 计算机学家们研究的一个数字为计算机病毒传染指数 C_0 , 即一个病毒文件在一分钟内平均所传染的文件数, 某计算机病毒的传染指数 $C_0 = 2$, 若一台计算机有 10^5 个可能被感染的文件, 如果该台计算机有一半以上文件被感染, 则该计算机将处于瘫痪状态. 该计算机现只有一个病毒文件, 如果未经防毒和杀毒处理, 则下列说法中正确的是 ()

- A. 在第 3 分钟内, 该计算机新感染了 18 个文件
- B. 经过 5 分钟, 该计算机共有 243 个病毒文件
- C. 10 分钟后, 该计算机处于瘫痪状态
- D. 该计算机瘫痪前, 每分钟内新被感染的文件数成公比为 2 的等比数列

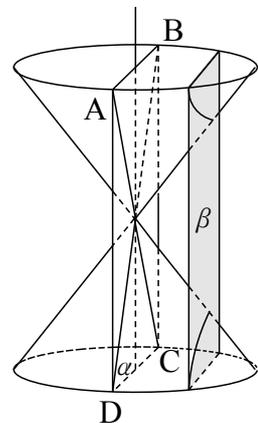
三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 抛物线 $C: y^2 = 2px$ 的焦点 F 是圆 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 的圆心, P 为抛物线 C 上在第一象限内的点, 且 $PF = 3$, 则 P 点的坐标为 _____

14. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项和公差都为 2. 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 = _____, 数列 $\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\}$ 上的前 2020 项和为 _____

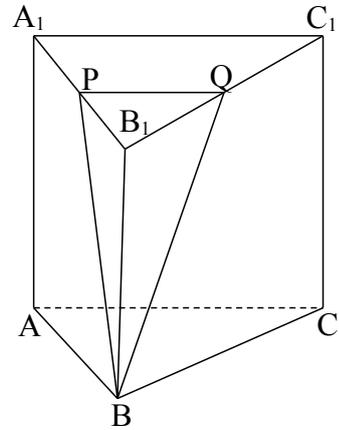
15. 已知长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的所有顶点都在球 O 的表面上, 且 $AB = BC = 3$, 异面直线 CC_1 与 AD_1 所成的角为 60° , 则球 O 的表面积为 _____

16. 古希腊数学家阿波罗尼斯在《圆锥曲线论》中记载了用平面截圆锥得到圆锥曲线的方法. 如图, 将两个完全相同的圆锥对顶放置 (两圆锥的顶点和轴都重合), 已知两个圆锥的底面直径均为 4, 侧面积均为 $2\sqrt{5}\pi$. 记过两个圆锥轴的截面为平面 a , 平面 a 与两个圆锥侧面的交线为 AC, BD . 已知平面 β 平行于平面 a , 平面 β 与两个圆锥侧面的交线为双曲线 C 的一部分, 且 C 的两条渐近线分别平行于 AC, BD , 则该双曲线 C 的离心率为 _____



四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle B_1A_1C_1 = 90^\circ$, P, Q 分别是棱 A_1B_1, B_1C_1 的中点
求证: (1) $AC \parallel$ 平面 BPQ ;
(2) $AC \perp BP$.



18. 在① $S_3 = 13$, ② $S_n = 3^n - 2$, ③ $S_n = \frac{3^n - 1}{2}$ 这三个条件中, 请选择一个条件将下面的题目补充完整

并解答本题.

题目: 设等比数列 $\{a_n\}$ 的各项都为正数, $a_1 = 1$, 前 n 项和为 S_n , 且 _____

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 令 $b_n = \log_3 a_{n+1}$, 求数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和

19. 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴长为 8, 一条准线方程为 $x = \frac{16\sqrt{7}}{7}$, 与椭圆 C_1 共焦点的双曲线 C_2 , 其离心率是椭圆 C_1 的离心率的 2 倍.

(1) 分别求椭圆 C_1 和双曲线 C_2 的标准方程:

(2) 过点 $M(4, 1)$ 的直线 l 与双曲线 C_2 , 交于 P, Q 两点, 且 M 为线段 PQ 的中点, 求直线 l 的方程.

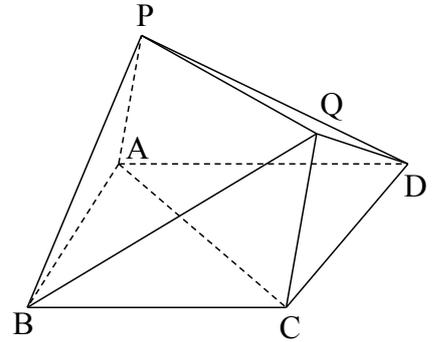
20. 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的各项均为正数, 前 n 项和分别为 S_n, T_n , 且对任意正整数, $n2a_n = S_n + 1, 2\sqrt{T_n} = b_n + 1$ 恒成立

(1) 分别求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式:

(2) 若对于任意的正整数 $n, T_n \leq k(S_n + 1)$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

21. 如图, 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $\angle ABC = 60^\circ$, 四边形 $PACQ$ 为矩形, $PA = 1$, 且平面, $PACQ \perp$ 平面 $ABCD$.

- (1) 求 BP 与平面 $ACQP$ 所成角的余弦值;
- (2) 求二面角 $B-PQ-D$ 的大小;
- (3) 求点 C 到平面 BPQ 的距离.



22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 有三条曲线:

① $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{m} = 1 (0 < m < 4)$, ② $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{n} = 1 (n > 0)$, ③ $y^2 = 2px (p > 0)$.

请从中选择合适的一条作为曲线 C , 使得曲线 C 满足: 点 $F(1, 0)$ 为曲线 C 的焦点, 直线 $y = x - 1$ 被曲线 C 截得的弦长为 8.

- (1) 请求出曲线 C 的方程;
- (2) 设 A, B 为曲线 C 上两个异于原点的不同动点, 且 OA 与 OB 的斜率之和为 1, 过点 F 作直线 AB 的垂线, 垂足为 H , 问是否存在定点 M , 使得线段 MH 的长度为定值? 若存在, 请求出点 M 的坐标和线段 MH 的长度; 若不存在, 请说明理由.