

# 基于椭圆光学性质的两个类包络现象的发现之旅

邵俊杰<sup>1</sup> 李金兴<sup>2</sup>

(1. 北京邮电大学计算机学院 102206; 2. 浙江省萧山中学 311201)

圆锥曲线作为中学解析几何学习的重点,拥有悠久的历史 and 众多性质;其中圆锥曲线的光学性质极为特殊.人教A版教材介绍了光线经过圆锥曲线焦点时的光学性质;那么,那些不经过圆锥曲线焦点的光线又有何特性呢?

## 1 椭圆中的两个类包络现象

考虑到圆锥曲线中只有椭圆是封闭曲线,光会一直在内部反射,我们先对椭圆中的一般弦做出研究.根据初始光线与两焦点连线段的三种关系:初始光线经过某焦点、初始光线与焦点连线段不相交、初始光线与焦点连线段相交但交点非焦点,分别讨论光线的反射性质.

### 1.1 过椭圆焦点的光线性质

**引理1** 设 $F_1, F_2$ 分别是椭圆的两个焦点, $P$ 是椭圆上任意一点,则从 $F_1$ 发出的光线经过 $P$ 点处椭圆反射后的反射光线经过点 $F_2$ .

**证明** 如图1,设椭圆在 $P$ 点处的切线为 $l$ ,作点 $F_2$ 关于 $l$ 的对称点 $F'_2$ ,下证 $F_1, F'_2, P$ 三点共线.用反证法,假设 $F'_2$ 不在直线 $F_1P$ 上.设 $F_1F'_2$ 交椭圆于 $T$ ,交 $l$ 于点 $Q$ .则 $|PF_1| + |PF'_2| > |F_1F'_2| = |TF_1| + |TQ| + |QF'_2| > |TF_1| + |TF_2|$ 矛盾,所以 $F_1, F'_2, P$ 三点共线( $Q$ 在 $P$ 左侧的情况同理可证).于是图2中 $\angle\alpha = \angle\gamma = \angle\beta$ ,由反射定律知 $F_1P$ 在 $P$ 点处椭圆反射后的反射光线为 $PF_2$ .

由此可见,如果初始光线沿过焦点的弦(非长轴),则经过椭圆反射后会通过另一个焦点,不断反射后交替地通过两个焦点.

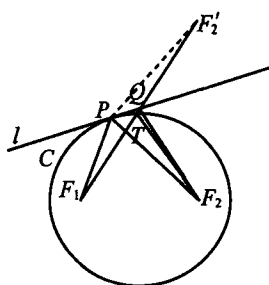


图1

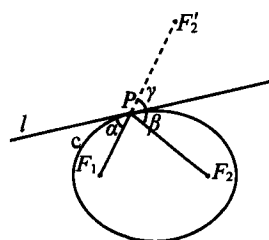


图2

### 1.2 初始光线与椭圆两焦点连线段不相交时的光学性质

为使证明过程简洁,我们先来证明几个引理.

**引理2** 椭圆 $C$ 以 $F_1, F_2$ 为焦点, $P$ 为 $C$ 上一点, $l$ 为椭圆 $C$ 在 $P$ 点处切线,作 $F_2$ 关于 $l$ 的对称点 $F'_2$ ,则 $F_1, P, F'_2$ 共线,且 $|F_1F'_2| = 2a$  ( $a$ 为椭圆半长轴长).

**证明** 如图2,由引理1知 $\angle\alpha = \angle\beta$ ,又因为 $F'_2$ 是 $F_2$ 关于 $l$ 的对称点,所以 $\angle\beta = \angle\gamma$ ,故有 $\angle\alpha = \angle\gamma$ ,所以 $F_1, P, F'_2$ 共线.由对称的性质可得 $|F'_2P| = |F_2P|$ ,则 $|F_1F'_2| = |F_1P| + |PF'_2| = |F_1P| + |PF_2| = 2a$ .

**引理3** 椭圆 $C$ 以 $F_1, F_2$ 为焦点, $A, B$ 为 $C$ 上两点, $l_1, l_2$ 分别为椭圆 $C$ 在 $A, B$ 点处的切线, $F$ 为 $l_1$ 与 $l_2$ 的交点,则 $\angle AFF_1 = \angle BFF_2$  (如图3).

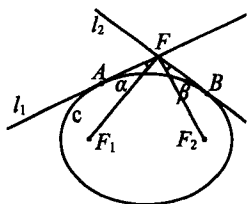


图3

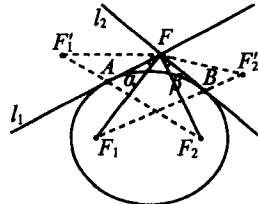


图4

**证明** 如图4,作 $F_1$ 关于 $l_1$ 的对称点 $F'_1$ ,作 $F_2$ 关于 $l_2$ 的对称点 $F'_2$ ,则由轴对称的性质得到 $\angle F'_1FA = \angle F_1FA$ ,  $\angle F'_2FB = \angle F_2FB$ ,因此要证 $\angle AFF_1 = \angle BFF_2$ ,只要证 $\angle F'_1FF_1 = \angle F'_2FF_2$ .注意到由引理2可以得到 $|F'_1F_2| = |F_1F'_2| = 2a$ ,由轴对称的性质有 $|FF'_1| = |FF_1|$ ,  $|FF'_2| = |FF_2|$ ,由此得到 $\triangle F'_1FF_2 \cong \triangle F_1FF'_2$ ,故 $\angle F'_1FF_2 = \angle F_1FF'_2$ ,注意到 $\angle F'_1FF_2 = \angle F'_1FF_1 + \angle F_1FF_2$ ,  $\angle F_1FF'_2 = \angle F_1FF_2 + \angle F_2FF'_2$ ,故 $\angle F'_1FF_1 = \angle F_2FF'_2$ ,则原结论成立.

由上述引理可得,当初始光线与椭圆焦点连线段不相交时有如下结论:

**定理1** 如图5,椭圆 $C_1$ 以 $F_1, F_2$ 为两焦点,椭圆 $C_1$ 的弦 $S_1S_2$ 与线段 $F_1F_2$ 不相交,从 $S_1$ 发出的光线 $S_1S_2$ 经椭圆 $C_1$ 反射后反射光线为 $S_2S_3$ ,则 $S_1S_2$ 和 $S_2S_3$ 均与另一个以 $F_1, F_2$ 为焦点的椭圆 $C_2$ 相切.

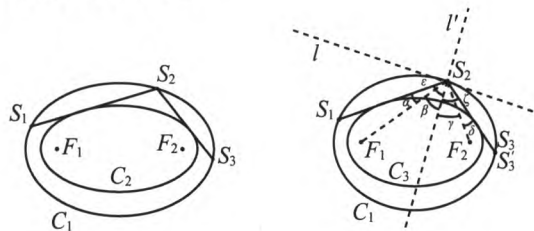


图5

**证明** 如图6,作椭圆 $C_1$ 在点 $S_2$ 处的切线 $l$ ,法线 $l'$ ,作以 $F_1, F_2$ 为焦点的椭圆 $C_2$ 与 $S_1S_2$ 相切,过 $S_2$ 作 $C_2$ 的另一条切线与椭圆 $C_1$ 交于点 $S'_3$ .

设图6中 $S_2F_1, S_2F_2$ 分别与法线 $l'$ 成 $\angle\beta$ 和 $\angle\gamma$ ,并记 $\angle S_1S_2F_1 = \angle\alpha$ ,  $\angle S'_3S_2F_2 = \angle\delta$ ,根据引理1不难得到 $\angle\beta = \angle\gamma$ ,再根据引理3得到 $\angle\alpha = \angle\delta$ ,注意到 $\angle\epsilon = \angle\alpha + \angle\beta$ ,  $\angle\zeta = \angle\gamma + \angle\delta$ ,故 $\angle\epsilon = \angle\zeta$ .根据反射定律知 $S_2S'_3$ 即为 $S_1S_2$ 在 $S_2$ 处的椭圆反射光线,因此点 $S_3$ 与点 $S'_3$ 重合,即反射光线 $S_2S_3$ 与入射光线 $S_1S_2$ 均与同一个以 $F_1, F_2$ 为焦点的椭圆 $C_2$ 相切.

于是可知,设椭圆 $C_0$ 内部初始光线所在直线为 $l_0$ ,经椭圆 $C_0$ 反射 $n$ 次后的反射光线所在直线为 $l_n$ .当 $l_0$ 与椭圆 $C_0$ 焦点连线段不相交时,由定理1得,可设 $l_0$ 与 $l_1$ 同与椭圆 $C_1$ 相切, $l_1$ 与 $l_2$ 同与椭圆 $C_2$ 相切,……, $l_n$ 与 $l_{n+1}$ 同与椭圆 $C_{n+1}$ 相切……;其中 $C_1, C_2, \dots, C_{n+1}, \dots$ 均与 $C_0$ 同焦点.因此 $C_1, C_2$ 共焦点且与同一条直线 $l_1$ 相切,故 $C_1, C_2$ 为同一个椭圆,记作椭圆 $C'$ ;同理 $C_n, C_{n+1}$ 共焦点且与同一条直线 $l_n$ 相切,故 $C_n, C_{n+1}$ 也为同一个椭圆;不难得到, $C_1, C_2, \dots, C_{n+1}, \dots$ 均为椭圆 $C'$ ;因此所有光线均与同一个椭圆 $C'$ 相切.此性质类似于包络,故称椭圆 $C'$ 为“包络”椭圆.对于一般情况,如图7所示,当光线经椭圆不断反射无数多次后,光线将围出一个椭圆(即 $C'$ ),但我们无法证明椭圆 $C'$ 上的每一点都是光线与 $C'$ 的切点,故不能严格证明这是一个包络现象.对于更特殊的情况(如图8),光线还会形成回路.

图7和图8展示了光线在椭圆内反射形成包络或回路的情况。图7显示光线在椭圆内不断反射，最终形成一个包围椭圆的区域。图8显示光线在椭圆内反射，最终形成一个回路。

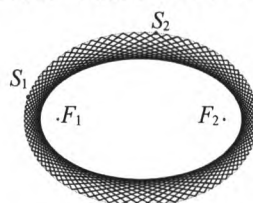


图7

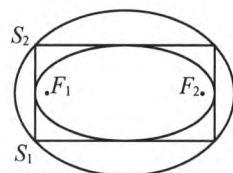


图8

另外,适当建立坐标系,设初始光线所在直线方程为 $sx+ty=1$ ,椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ,那么“包络”成的椭圆方程为 $\frac{x^2}{m^2+c^2}+\frac{y^2}{m^2}=1$ ( $c^2=a^2-b^2$ ).再设初始光线与“包络”椭圆切于点 $P(x_0, y_0)$ ,则初始光线亦可表示为 $\frac{xx_0}{m^2+c^2}+\frac{yy_0}{m^2}=1$ ,与 $sx+ty=1$ 比较系数得 $m^2=\frac{1-s^2c^2}{s^2+t^2}$ ,故“包络”椭圆方程为 $\frac{x^2}{1+t^2c^2}+\frac{y^2}{1-s^2c^2}=\frac{1}{s^2+c^2}$ .因初始光线与椭圆焦点连线段不相交,故 $(sc+t \cdot 0-1) \cdot (-sc+t \cdot 0-1)>0$ ,即 $1-s^2c^2>0$ ,所以上式确实为椭圆方程.

### 1.3 初始光线与椭圆两焦点连线段相交(交点非端点)时的光学性质

为证明方便,我们先介绍双曲线焦点弦的光学性质.

**引理4** 点 $P$ 在以 $F_1, F_2$ 为焦点的双曲线上,从 $F_2$ 射出的光线经过 $P$ 点双曲线反射后的反射光线与从 $F_1$ 点射出经过 $P$ 点的光线在同一条直线上.

**证明** 与引理1证明类似地,设双曲线在 $P$ 点处的切线为 $l$ , $F_2$ 关于 $l$ 的对称点 $F'_2$ ,假设 $F'_2$

不在直线  $F_1P$  上. 如图 9, 若  $F_2$  为双曲线右焦点、 $P$  在右支上, 设直线  $F_1F'_2$  交双曲线于点  $T$ , 交  $l$  于点  $Q$ . 则  $|PF_1| - |PF'_2| < |F_1F'_2| = |TF_1| - (|TQ| + |QF'_2|) < |TF_1| - |TF_2| = |PF_1| - |PF'_2|$  矛盾, 所以  $F_1, F'_2, P$  三点共线 (点  $Q$  在点  $P$  上方的情况同理可证), 则图 9 中  $\angle\alpha = \angle\gamma = \angle\beta$ , 故从  $F_2$  射出的光线经过  $P$  点双曲线反射后的反射光线与从  $F_1$  点射出经过  $P$  点的光线在同一条直线上.

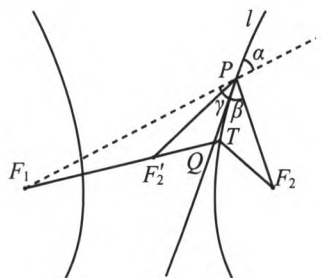


图 9

**引理 5** 如图 9, 设  $P$  点处双曲线的切线为  $l$ , 作  $F_2$  关于切线  $l$  的对称点  $F'_2$ , 则  $F_1, F'_2, P$  共线, 且  $|F_1F'_2| = 2a$  ( $a$  为双曲线实半轴长).

**证明** 因为点  $F'_2$  为  $F_2$  关于直线  $l$  的对称点, 故  $\angle\beta = \angle\gamma$ , 由引理 4 知  $\angle\alpha = \angle\beta$ , 则  $\angle\alpha = \angle\gamma$ , 故  $F_1, F'_2, P$  共线, 又由轴对称的性质知  $|PF'_2| = |PF_2|$ , 故  $|F_1F'_2| = |F_1P| - |PF'_2| = |F_1P| - |PF_2| = 2a$ .

至此我们便可以讨论初始光线与椭圆两焦点连线段相交时的光学性质了.

**定理 2** 如图 10, 椭圆  $C$  以  $F_1, F_2$  为两焦点, 椭圆  $C$  的弦  $S_1S_2$  与线段  $F_1F_2$  相交 (交点异于  $F_1, F_2$ ), 从  $S_1$  发出的光线  $S_1S_2$  经椭圆反射后反射光线为  $S_2S_3$ , 则入射光线  $S_1S_2$  和反射光线  $S_2S_3$  所在直线均与一个以  $F_1, F_2$  为焦点的双曲线  $C'$  相切.

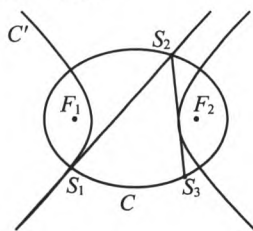


图 10

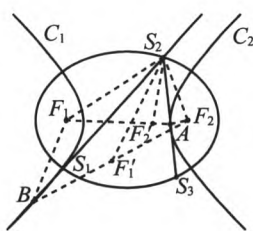


图 11

**证明** 如图 11, 以  $F_1, F_2$  为焦点作双曲线

$C_1, C_2$  (其中各一支) 分别与直线  $S_1S_2, S_2S_3$  相切, 作  $F_1$  关于  $S_1S_2$  的对称点  $F'_1$ , 由引理 5 知  $|F'_1F_2| = 2a_1$  ( $a_1$  为  $C_1$  的实半轴长); 同理, 作  $F_2$  关于  $S_2S_3$  的对称点  $F'_2$ , 则  $|F_1F'_2| = 2a_2$  ( $a_2$  为  $C_2$  的实半轴长). 结合反射定律和引理 1 不难得到  $\angle F_1S_2S_1 = \angle F_2S_2S_3$ , 注意到  $\angle F_1S_2F'_2 = 2\angle F_1S_2S_1 + \angle F'_1S_2F'_2$ ,  $\angle F_2S_2F'_1 = 2\angle F_2S_2S_3 + \angle F'_2S_2F'_1$ , 故  $\angle F_1S_2F'_2 = \angle F_2S_2F'_1$ , 又由轴对称的性质知  $|F_1S_2| = |F'_1S_2|$ ,  $|S_2F'_2| = |S_2F_2|$ , 故  $\triangle F_1S_2F'_2 \cong \triangle F'_1S_2F_2$ , 则  $|F_1F'_2| = |F'_1F_2|$ , 即  $2a_1 = 2a_2$ , 因此  $C_1, C_2$  均以  $F_1, F_2$  为焦点, 且实半轴长相等. 故入射光线  $S_1S_2$  与反射光线  $S_2S_3$  均与同一个以  $F_1, F_2$  为焦点的双曲线  $C'$  相切.

于是可知, 设椭圆  $C_0$  内部初始光线所在直线为  $l_0$ , 经椭圆  $C_0$  反射  $n$  次后的反射光线所在直线为  $l_n$ . 当  $l_0$  与椭圆  $C_0$  焦点连线段相交 (交点非端点) 时, 由定理 2 得, 可设  $l_0$  与  $l_1$  同与双曲线  $C_1$  相切,  $l_1$  与  $l_2$  同与双曲线  $C_2$  相切,  $\dots, l_n$  与  $l_{n+1}$  同与双曲线  $C_{n+1}$  相切  $\dots$ ; 其中  $C_1, C_2, \dots, C_{n+1}, \dots$  均与  $C_0$  同焦点. 因此  $C_1, C_2$  共焦点且与同一条直线  $l_1$  相切, 故  $C_1, C_2$  为同一个双曲线, 记作双曲线  $C'$ ; 同理  $C_n, C_{n+1}$  共焦点且与同一条直线  $l_n$  相切, 故  $C_n, C_{n+1}$  也为同一个双曲线; 不难得到,  $C_1, C_2, \dots, C_{n+1}, \dots$  均为双曲线  $C'$ ; 因此所有光线均与同一个双曲线  $C'$  相切. 与之前结论一样, 这是一个类似于包络的现象 (我们无法严格证明), 故称双曲线  $C'$  为“包络”双曲线, 对于一般情况, 如图 12 所示, 当光线经椭圆不断反射无数多次后, 光线将围出一个双曲线 (即  $C'$ ).

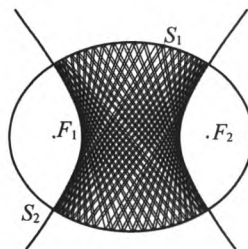


图 12

同样地, 适当建立坐标系,  $C'$  方程可表示为  $\frac{x^2}{1+t^2c^2} + \frac{y^2}{1-s^2c^2} = \frac{1}{s^2+t^2}$ . 而且此时初始光线与椭圆焦点连线段相交 (交点非端点), 故  $(sc+t \cdot$

$0-1) \cdot (-sc+t \cdot 0-1) < 0$ , 即  $1-s^2c^2 < 0$ , 所以上式确实为双曲线的方程.

## 2 抛物线中相应的结论与证明

参考椭圆中的不同情况, 在抛物线中也对初始光线的位置分三种情况讨论.

第一种情况: 当光线经过抛物线焦点时, 相关结论已广为人知, 下面给出一种证明.

**定理 3** 抛物线  $C$  以  $A$  为焦点,  $l$  为准线, 点  $P$  为抛物线  $C$  上一点, 从点  $A$  射出的光线经过点  $P$  处抛物线反射后的反射光线与  $l$  垂直.

**证明** 设抛物线方程为  $y^2 = 2px$ ,  $P(x_0, y_0)$ , 则点  $P$  处抛物线的切线为  $y = \frac{p}{y_0}(x - x_0) + y_0$ , 切线与  $x$  轴交点为  $T(-x_0, 0)$ , 故  $|TA| = x_0 + \frac{p}{2}$ , 而  $|PA| = x_0 + \frac{p}{2}$ , 所以  $|PA| = |TA|$ , 则图 13 中  $\angle\beta = \angle\alpha = \angle\gamma$ , 所以反射光线与  $x$  轴平行, 即反射光线与  $l$  垂直.

在讨论第二种情况前, 先证如下引理:

**引理 6** 如图 13, 在定理 3 中作点  $A$  关于点  $P$  处抛物线切线的对称点  $A'$ , 则  $A'$  在准线  $l$  上, 且  $A'P \perp l$ .

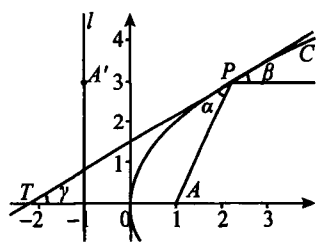


图 13

**证明** 过点  $P$  作准线  $l$  的垂线, 垂足为点  $A''$ , 由抛物线定义知  $|A''P| = |AP|$ , 又由定理 3 知  $\angle A''PT = \angle\gamma = \angle\alpha$ , 故可得点  $A''$  与点  $A'$  重合, 故引理成立.

第二种情况: 过抛物线焦点作准线的垂线段, 当初始光线与该垂线段相交时, 有如下光学性质:

**定理 4** 过抛物线  $C_1$  的焦点  $F$  作准线  $l_1$  的垂线段, 抛物线弦  $S_1S_2$  与该垂线段相交, 从  $S_1$  发出的光线  $S_1S_2$  经抛物线反射后反射光线为  $S_2S_3$ , 则入射光线  $S_1S_2$  与反射光线  $S_2S_3$  均与另一个以  $F$  为焦点, 准线与  $l_1$  平行的抛物线  $C_2$  相切.

**证明** 如图 14, 过  $S_2$  作  $l_1$  的垂线段, 垂足为  $H$ , 作抛物线  $C_1$  在点  $S_2$  处的切线  $S_2T$ , 作  $S_1$  关于  $S_2T$  的对称点  $S'_1$ , 作  $F$  关于  $S_1S_2$  的对称点  $F'$ , 作  $F$  关于  $S_2S_3$  的对称点  $F''$ . 由反射的性质有  $S'_1$  在  $S_2S_3$  上. 由引理 6 知点  $H$  与点  $F$  关于  $S_2T$  对称, 因此若记图 14 中  $\angle HS_2F' = \angle\alpha$ ,  $\angle HS_2F'' = \angle\beta$ , 则

$$\angle\alpha = (\angle F'S_2S'_1 + \angle S'_1S_2F) - (\angle HS_2T + \angle TS_2F) = 2(\angle S'_1S_2F - \angle TS_2F) = 2\angle S'_1S_2T,$$

$$\angle\beta = (\angle HS_2T + \angle TS_2F) - (\angle F'S_2S_1 + \angle S_1S_2F) = 2(\angle TS_2F - \angle S_1S_2F) = 2\angle S_1S_2T,$$

又  $\angle S'_1S_2T = \angle TS_2S_1$ , 所以  $\angle\alpha = \angle\beta$ . 记直线  $F'F''$  为  $l_2$ . 注意到, 由轴对称的性质我们有  $|FS_2| = |F'S_2| = |F''S_2|$ , 由等腰三角形三线合一知  $HS_2$  与  $l_2$  垂直, 故  $l_1$  与  $l_2$  平行. 设与  $S_2S_3$  ( $S_1S_2$ ) 相切、且以  $F$  为焦点, 准线与  $l_1$  平行的抛物线为  $C'$  ( $C''$ ), 由引理 6 知  $C'$ 、 $C''$  准线均为  $l_2$ . 故定理成立.

对于第三种情况: 过抛物线焦点作准线的垂线段, 当初始光线与该垂线段不相交时, 得到如图 15 所示的现象, 无法得到良好的性质.

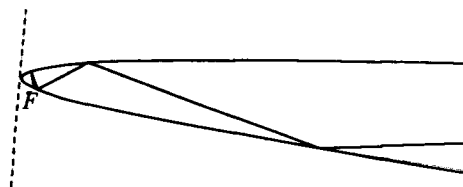


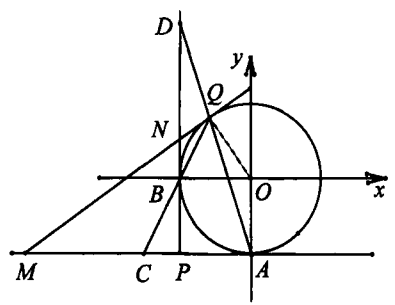
图 15

## 3 结语

通过探究我们发现, 光线经双曲线反射后很快发散(如图 16、图 17 所示), 因此未能找到良好的性质. 在椭圆中我们还企图通过解析法对反射之后的坐标与方程进行研究, 以观察能否找到一些规律, 以确定哪些特殊情况能够使反射光线形成回路; 很遗憾, 通过 Mathematica 的计算结果来看, 一次反射之后的坐标与方程已经过于复杂, 难以找出规律, 希望能通过后续的研究取得一些新的进展. 此外, 对椭圆中光线能否形成包络现象? 如果能够形成包络现象的 (下转第 61 页)

$\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ , 则点  $Q$  是否为劣弧  $AB$  的动点无关, 只需点  $Q$  是圆上动点且与点  $A, B$  不重合.

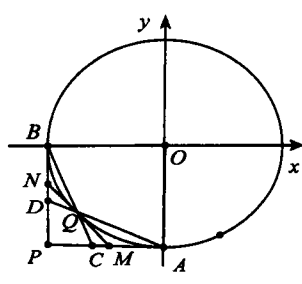
**命题 1** 过  $\odot O$  外一点  $P$  向  $\odot O$  作切线, 切点为  $A, B$ , 点  $Q$  为圆上不与点  $A, B$  重合的一动点, 过点  $Q$  作  $\odot O$  的切线交直线  $PA, PB$  于点  $M, N$ , 直线  $BQ, AQ$  交直线  $PA, PB$  于点  $C, D$ , 若  $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ , 则有  $\frac{1}{PC} + \frac{1}{CM} + \frac{1}{MA} = \frac{1}{PD} + \frac{1}{DN} + \frac{1}{NB}$ .



当然也可以用几何方法证明.

推广二: 将问题中的圆改为椭圆, 其它条件不变, 结论是否仍成立呢? 能否还可以得到其它结论?

**命题 2** 如图, 椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ,  $P(-a, -b)$ ,  $A, B$  分别为椭圆的下、左顶点, 点  $Q$  是椭圆  $C$  上异于  $A, B$  的一动点, 以  $Q$  为切点的



切线交  $PA, PB$  于  $M, N$ , 直线  $BQ$  交直线  $PA$  于点  $C$ , 直线  $AQ$  交  $PB$  于点  $D$ .

- 则 (1)  $|PC| \cdot |MA| = |CM| \cdot |PA|$ ;  
(2)  $|PC| = \frac{a}{b} |BN|$ ;  
(3)  $b(\frac{1}{BN} + \frac{1}{ND} + \frac{1}{PD}) = a(\frac{1}{PC} + \frac{1}{CM} + \frac{1}{MA})$ .

**证明** (1)  $P(-a, -b), A(0, -b), B(-a, 0)$ , 设  $Q(a \cos \alpha, b \sin \alpha)$ ,

所以  $MN: \frac{\cos \alpha}{a} x + \frac{\sin \alpha}{b} y = 1$ ,

$AQ: y = \frac{b \sin \alpha + b}{a \cos \alpha} x - b$ ,

$BQ: y = \frac{b \sin \alpha}{a \cos \alpha + a} (x + a)$ ,

所以  $M(\frac{a(1 + \sin \alpha)}{\cos \alpha}, -b), N(-a, \frac{b(1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha})$ ,  
 $C(-\frac{a(1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha} - a, -b), D(-a, -\frac{b(1 + \sin \alpha)}{\cos \alpha} - b)$ ,

$|PC| = a \left| \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right|, |MA| = a \left| \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} \right|$ ,

$|PA| = a$ ,

$|CM| = a \left| \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} + 1 \right|$   
 $= a \frac{|1 + \sin \alpha + \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha|}{|\sin \alpha \cos \alpha|}$   
 $= a \frac{|(1 + \sin \alpha)(1 + \cos \alpha)|}{|\sin \alpha \cos \alpha|}$ ,

所以  $|PA| \cdot |CM| = |PC| \cdot |MA|$ .

(2)  $|BN| = \left| \frac{b(1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha} \right|, \frac{|PC|}{|BN|} = \frac{a}{b}$ ,

故  $|PC| = \frac{a}{b} |BN|$ .

(3) 由 (2) 可知成立.

(上接第 59 页) 话对初始光线有何限制条件? 等问题都有待进一步的探究.

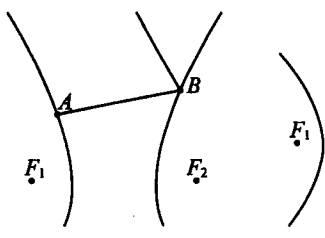


图 16

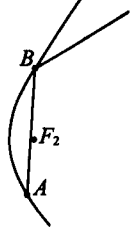


图 17

**参考文献**  
[1] 李健, 童莉. “椭圆光学性质”的古今三种证明方法及思考 [J]. 数学通报, 2012, 51(10): 35-37