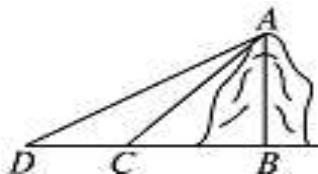


2022 届高三数学十月月考试卷

时间：120 分钟 满分 150 份

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $A = \{y|y=2^x, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{y|y=x^2, x \in \mathbf{R}\}$, 则 ()
A. $A \subseteq B$ B. $A \supseteq B$ C. $A = B$ D. $A \cap B = \emptyset$
2. 已知纯虚数 z 满足 $(1 - 2i)z = 2 + ai$, 其中 i 为虚数单位, 则实数 a 等于 ()
A. -1 B. 1 C. -2 D. 2
3. 五名同学国庆假期相约去珠海野狸岛日月贝采风观景, 结束后五名同学排成一排照相留念, 若甲、乙二人不相邻, 则不同的排法共有 ()
A. 36 种 B. 48 种 C. 72 种 D. 120 种
4. 如图, 从地面上 C, D 两点望山顶 A , 测得它们的仰角分别为 45° 和 30° , 已知 $CD = 100$ 米, 点 C 位于 BD 上, 则山高 AB 等于 ()

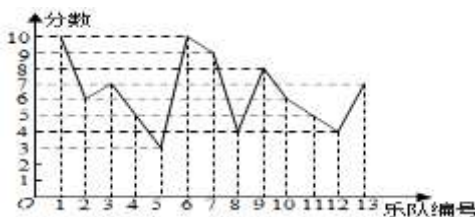


- A. 100 米 B. $50\sqrt{3}$ 米 C. $50\sqrt{2}$ 米 D. $50(\sqrt{3}+1)$ 米
5. 已知两组数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 与 $y_1, y_2, \dots, y_n$, 它们的平均数分别是 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$, 则新的一组数据 $2x_1 - 3y_1 + 1, 2x_2 - 3y_2 + 1, \dots, 2x_n - 3y_n + 1$ 的平均数是 ()
A. $2\bar{x} - 3\bar{y}$ B. $2\bar{x} - 3\bar{y} + 1$ C. $4\bar{x} - 9\bar{y}$ D. $4\bar{x} - 9\bar{y} + 1$
6. 衣柜里的樟脑丸, 随着时间的推移会因挥发而使体积缩小, 刚放进去的新丸体积为 a , 经过 t 天后体积 V 与天数 t 的关系式为: $V = a \cdot e^{-kt}$. 已知新丸经过 50 天后, 体积变为 $\frac{4}{9}a$, 若一个新丸体积变为 $\frac{8}{27}a$, 则需经过的天数为 ()
A. 125 B. 100 C. 75 D. 150
7. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $b^2 + c^2 = a^2 + bc$, 若 $\sin B \cdot \sin C = \sin^2 A$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 ()
A. 等腰三角形 B. 直角三角形 C. 等边三角形 D. 等腰直角三角形
8. 已知函数 $f(x) = e^{ax} - \sqrt{x}$ 存在两个零点, 则正数 a 的取值范围是 ()

- A. $(0, \frac{e}{2})$ B. $(\frac{e}{2}, +\infty)$ C. $(0, \frac{1}{2e})$ D. $(\frac{1}{2e}, +\infty)$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分.

9. 珠海市第二中学校歌决赛中，评委给 13 个班级的评分（十分制）如图，下列说法正确的是（ ）



- A. 13 个班级评分的极差为 7 B. 13 个班级中评分不低于 7 分的有 6 支
- C. 13 个班级评分的平均数约为 6.46 D. 第 6 个班级到第 12 个班级的评分逐渐降低

10. 设 O 为坐标原点， F_1, F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的焦点. 若在双曲线上

存在点 P ，满足 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$ ， $|OP| = \sqrt{7}a$ ，则（ ）

- A. 双曲线的方程可以是 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ B. 双曲线的渐近线方程是 $\sqrt{2}x \pm y = 0$

- C. 双曲线的离心率为 $\sqrt{3}$ D. $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\sqrt{3}a^2$

11. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，已知 $S_{10} = 0$ ， $S_{15} = 25$ ，则（ ）

- A. $a_5 = 0$ B. $\{a_n\}$ 的前 n 项和中 S_5 最小
- C. nS_n 的最小值为 -49 D. $\frac{S_n}{n}$ 的最大值为 0

12. 已知函数 $f(x) = -\log_2 x$ ，下列四个命题正确的是（ ）

- A. 函数 $f(|x|)$ 为偶函数 B. 若 $f(a) = |f(b)|$ ，其中 $a > 0, b > 0, a \neq b$ ，则 $ab = 1$
- C. 函数 $f(-x^2 + 2x)$ 在 $(1, 3)$ 上为单调递增函数 D. 若 $0 < a < 1$ ，则 $|f(1+a)| < |f(1-a)|$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知 $\mathbf{a} = (3, -4)$, $\mathbf{b} = (2, 3)$, 则 $2|\mathbf{a}| - 3\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$ _____.

14. 已知直线 l (斜率大于 0) 的倾斜角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 在 x 轴上的截距为 -2, 直线 l 与抛物线 C :

$x^2 = 2py$ ($p > 0$) 交于 A, B 两点. 若 $|AB| = 16$, 则 $p =$ _____.

15. 已知三棱锥 $P - ABC$ 的所有棱长都相等, 现沿 PA, PB, PC 三条侧棱剪开, 将其表面展开成一个平面图形, 若这个平面图形外接圆的半径为 $2\sqrt{6}$, 则三棱锥 $P - ABC$ 的内切球的体积为_____.

16. 给出下列命题:

① 已知 ξ 服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$, 且 $P(-2 \leq \xi \leq 2) = 0.4$, 则 $P(\xi > 2) = 0.3$;

② $f(x - 1)$ 是偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则

$$f\left(2^{\frac{1}{8}}\right) > f\left(\log_2\left(\frac{1}{8}\right)\right) > f\left(\left(\frac{1}{8}\right)^2\right);$$

③ 已知直线 $l_1: ax + 3y - 1 = 0$, $l_2: x + by + 1 = 0$, 则 $l_1 \perp l_2$ 的充要条件是 $\frac{a}{b} = -3$;

④ 已知 $a > 0$, $b > 0$, 函数 $y = 2ae^x + b$ 的图象过点 $(0, 1)$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值是 $4\sqrt{2}$.

其中正确命题的序号是_____ (把你认为正确的序号都填上).

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 设 $\sqrt{7}(a \cos B + b \cos A) = ac$, 且 $\sin 2A = \sin A$. (1) 求 A 及 a ; (2) 若 $b - c = 2$, 求 BC 边上的高.

18. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $a_{n+1} = 2a_n + 1$, 且 $a_1 + 2a_2 = a_3$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式; (2) 求使得 $S_n \leq 121$ 成立的 n 的最大值.

19. (12 分) 经验表明, 一般树的胸径 (树的主干在地面以上 $1.3m$ 处的直径) 越大, 树就越高. 由于测量树高比测量胸径困难, 因此研究人员希望由胸径预测树高. 下面给出了某林场在研究树高与胸径之间的关系时收集的某种树的数据.

编号	1	2	3	4	5	6
胸径/cm	18.1	20.1	22.2	24.4	26.0	28.3
树高/cm	18.8	19.2	21.0	21.0	22.1	22.1
编号	7	8	9	10	11	12
胸径/cm	29.6	32.4	33.7	35.7	38.3	40.2
树高/cm	22.4	22.6	23.0	24.3	23.9	24.7

- (1) 根据表格绘制树高 y 与胸径 x 之间关系的散点图；
- (2) 分析树高 y 与胸径 x 之间的相关关系，并求 y 关于 x 的线性回归方程；
- (3) 预测当树的胸径为 50.6cm 时，树的高度约为多少。（精确 0.01 ）

附：回归方程 $\hat{y} = bx + a$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为：

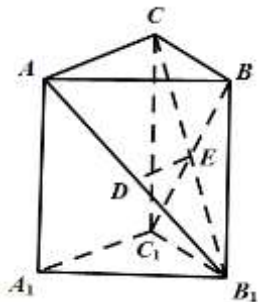
$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2},$$

$$a = \bar{y} - b \bar{x}.$$

参考数据： $\sum_{i=1}^{12} x_i y_i = 7851.03$, $\sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 10715.74$.

20. （12分）如图，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $CC_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$ ， D 为 AB_1 的中点，
 B_1C 交 BC_1 于点 E ， $AC \perp BC$ ， $BC = AC = 2$.

- (1) 证明： $DE \perp$ 平面 BB_1C_1C ；
- (2) 若 $C_1B \perp AB_1$ ，求二面角 $A - B_1C - A_1$ 的余弦值.



21. （12分）已知函数 $f(x) = \ln x - ax$ ， $x \in (0, e]$ ，其中 e 为自然对数的底数.

- (1) 若 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极值点，求 $f(x)$ 的单调区间和最大值；
- (2) 是否存在实数 a ，使得 $f(x)$ 的最大值是 -3 ？若存在，求出 a 的值；若不存在，说明理由。

22. (12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 点 $P(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ 在

C 上.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 设 O 为坐标原点, $H(0, -\frac{1}{2})$, 试判断在椭圆 C 上是否存在三个不同点 Q, M, N

(其中 M, N 的纵坐标不相等), 满足 $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OQ}$, 且直线 HM 与直线 HN 倾斜角互补?

若存在, 求出直线 MN 的方程, 若不存在, 说明理由.

2022 届高三数学十月月考参考答案与试题解析

一、单项选择题:

1. A. 2. B. 3. C. 4. D.

5. 解: 由已知, $(x_1+x_2+\cdots+x_n) = n\bar{x}$, $(y_1+y_2+\cdots+y_n) = n\bar{y}$,

新的一组数据 $2x_1 - 3y_1 + 1$, $2x_2 - 3y_2 + 1$, $\cdots$, $2x_n - 3y_n + 1$ 的平均数为 $(2x_1 - 3y_1 + 1 + 2x_2 - 3y_2 + 1 + \cdots + 2x_n - 3y_n + 1) \div n = [2(x_1+x_2+\cdots+x_n) - 3(y_1+y_2+\cdots+y_n) + n] \div n = 2\bar{x} - 3\bar{y} + 1$ 故选: B.

6. 解: 由题意得 $V = a \cdot e^{-50k} = \frac{4}{9}a$, ① 可令 t 天后体积变为 $\frac{8}{27}a$, 即有 $V = a \cdot e^{-kt} = \frac{8}{27}a$,

②

由①可得 $e^{-50k} = \frac{4}{9}$, ③ 又② $\div$ ①得 $e^{-(t-50)k} = \frac{2}{3}$, 两边平方得 $e^{-(2t-100)k} = \frac{4}{9}$,

与③比较可得 $2t - 100 = 50$, 解得 $t = 75$, 即经过 75 天后, 体积变为 $\frac{8}{27}a$. 故选: C.

7. 解: 在 $\triangle ABC$ 中, $\because b^2 + c^2 = a^2 + bc$, $\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2}$,

$\because A \in (0, \pi)$, $\therefore A = \frac{\pi}{3}$. $\because \sin B \cdot \sin C = \sin^2 A$, $\therefore bc = a^2$,

代入 $b^2 + c^2 = a^2 + bc$, $\therefore (b - c)^2 = 0$, 解得 $b = c$. $\therefore \triangle ABC$ 的形状是等边三角形. 故选: C.

8. 解: $\because$ 函数 $f(x) = e^{ax} - \sqrt{x}$ 存在两个零点, $\therefore e^{ax} - \sqrt{x} = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 存在两个不同的解,

$\therefore ax = \frac{1}{2} \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 存在两个不同的解, 即 $a = \frac{\frac{1}{2} \ln x}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 存在两个不同的解,

解,

令 $g(x) = \frac{\frac{1}{2} \ln x}{x}$, $g'(x) = \frac{\frac{1}{2} (1 - \ln x)}{x^2}$,

故 $x \in (0, e]$ 时, $g'(x) \geq 0$, $x \in (e, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$,

故 $g(x)$ 在 $(0, e]$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减,

且 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$, $g(e) = \frac{1}{2e}$, $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow 0$, 故 $0 < a < \frac{1}{2e}$, 故选:

C.

二、多项选择题:

9. 解: 对于 A, 13 个班级评分的极差为 $10 - 3 = 7$, 选项 A 正确; 对于 B, 13 个班级中评分不低于 7 分的有 10、7、10、9、8、7 共 6 支, 选项 B 正确; 对于 C, 计算 13 个班级

评分的平均值为 $\frac{1}{13} \times (10+6+7+5+3+10+9+4+8+6+5+4+7) = \frac{84}{13} \approx 6.46$, 选项 C 正确;

对于 D, 从第 6 个班级到第 12 个班级的评分并不是逐渐降低的, 其中第 9 个班级评分较高的,

选项 D 错误. 故选: ABC.

10. 解: 如图, $\because O$ 为 F_1F_2 的中点, $\therefore \overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2} = 2\overrightarrow{PO}$, $\therefore (\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2})^2 = (2\overrightarrow{PO})^2$,

$$\text{即 } |\overrightarrow{PF_1}|^2 + |\overrightarrow{PF_2}|^2 + 2|\overrightarrow{PF_1}| \cdot |\overrightarrow{PF_2}| \cdot \cos 60^\circ = 4|\overrightarrow{PO}|^2.$$

$$\text{又 } \because |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{7}a, \therefore |\overrightarrow{PF_1}|^2 + |\overrightarrow{PF_2}|^2 + |\overrightarrow{PF_1}| |\overrightarrow{PF_2}| = 28a^2. \quad ①$$

$$\text{又由双曲线的定义得 } |PF_1| - |PF_2| = 2a, \therefore (|PF_1| - |PF_2|)^2 = 4a^2.$$

$$\text{即 } |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1| |PF_2| = 4a^2. \quad ②$$

$$\text{由 } ① - ② \text{ 得 } |PF_1| \cdot |PF_2| = 8a^2, \therefore |PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 20a^2.$$

$$\text{在 } \triangle F_1PF_2 \text{ 中, 由余弦定理得 } \cos 60^\circ = \frac{|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|PF_1| |PF_2|}, \therefore 8a^2 = 20a^2 - 4c^2,$$

$$\text{即 } c^2 = 3a^2.$$

$$\text{又 } \because c^2 = a^2 + b^2, \therefore b^2 = 2a^2, \text{ 即 } \frac{b^2}{a^2} = 2, \frac{b}{a} = \sqrt{2}. \therefore \text{双曲线的渐近线方程为 } \sqrt{2}x \pm y = 0.$$

双曲线的离心率为 $\sqrt{3}$, 双曲线的方程可以是 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$, $\triangle PF_1F_2$ 的面积

$$S = \frac{1}{2} |PF_1| |PF_2| \sin \angle F_1PF_2 = \frac{1}{2} \times 8a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}a^2. \text{ 故 BC 正确.}$$

11. 解: $\because$ 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_{10} = 0$, $S_{15} = 25$,

$$\therefore \begin{cases} 10a_1 + 45d = 0 \\ 15a_1 + 105d = 25 \end{cases}, \text{ 解得 } a_1 = -3, d = \frac{2}{3}, \therefore a_n = \frac{1}{3}(2n-11), \therefore a_5 = -\frac{1}{3}, \text{ 故 A 错误;}$$

$$S_n = \frac{1}{3}(n^2 - 10n) = \frac{1}{3}(n-5)^2 - \frac{25}{3}, \text{ 故 B 正确;}$$

$$nS_n = \frac{n^3}{3} - \frac{10}{3}n^2, \text{ 设函数 } f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{10}{3}x^2 (x > 0),$$

$$\text{则 } f'(x) = x^2 - \frac{20}{3}x, \text{ 当 } x \in (0, \frac{20}{3}) \text{ 时, } f'(x) < 0,$$

$$\text{当 } x \in (\frac{20}{3}, +\infty) \text{ 时, } f'(x) > 0, \therefore f(x)_{\min} = f(\frac{20}{3}),$$

$$6 < \frac{20}{3} < 7, \text{ 且 } f(6) = -48, f(7) = -49, \therefore nS_n \text{ 的最小值为 } -49, \text{ 故 C 正确;}$$

$$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{3}(n-10), \text{ 没有最大值, 故 } D \text{ 错误. 故选: } BC.$$

12. 解: 对于 A: 函数 $f(x) = -\log_2 x$, 所以 $f(|x|) = -\log_2 |x|$, 由于 $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

所以 $f(-|x|) = f(|x|)$ 所以函数为偶函数, 故选项 A 正确.

对于 B: $f(a) = |f(b)|$, 所以 $f(a) = |f(b)| = -f(b)$, 所以 $-\log_2 a = \log_2 b$, 整理得 $ab=1$, 故选项 B 正确.

对于 C: 函数 $f(-x^2+2x) = -\log_2(-x^2+2x)$, 由于 $-x^2+2x > 0$, 所以 $0 < x < 2$,

所以函数在 $(1, 3)$ 上不具备单调性, 故选项 C 错误.

对于 D: 由于 $0 < a < 1$, 所以 $1+a > 1 > 1-a > 0$, 所以 $0 < 1-a^2 < 1$, 所以 $f(1+a) < 0 < f(1-a)$,

故 $|f(1+a)| - |f(1-a)| = |-\log_2(1+a)| - |-\log_2(1-a)| = \log_2(1+a) + \log_2(1-a) = \log_2(1-a^2) < 0$, 故 $|f(1+a)| < |f(1-a)|$. 故 D 正确. 故选: ABD.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 答案为: 28

14. 解: 由题意, 直线 l (斜率大于 0) 的倾斜角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则直线 l 的倾斜角为 45° ,

故直线的斜率为 1, 又直线 l 在 x 轴上的截距为 -2, 则直线 l 的方程为 $y=x+2$,

$$\text{联立方程组 } \begin{cases} x^2=2py \\ y=x+2 \end{cases}, \text{ 则 } x^2-2px-4p=0, \text{ 设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 则有 } \begin{cases} x_1+x_2=2p \\ x_1x_2=-4p \end{cases},$$

$$\text{所以 } |AB| = \sqrt{1+1^2} \cdot |x_1-x_2| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{4p^2+16p} = 16,$$

化简可得 $p^2+4p-32=0$, 因为 $p>0$, 所以 $p=4$. 故答案为: 4.

15. 解: 三棱锥 $P-ABC$ 展开后为一等边三角形, 设边长为 a , 则 $4\sqrt{6} = \frac{a}{\sin A}$, $\therefore a=6\sqrt{2}$,

$\therefore$ 三棱锥 $P-ABC$ 棱长为 $3\sqrt{2}$, 三棱锥 $P-ABC$ 的高为 $2\sqrt{3}$,

$$\text{设内切球的半径为 } r, \text{ 则 } 4 \times \frac{1}{3}r \times S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \times 2\sqrt{3}, \therefore r = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \text{三棱锥 } P-ABC \text{ 的内切球的体积为 } \frac{4\pi}{3}r^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi. \text{ 故答案为: } \frac{\sqrt{3}}{2}\pi.$$

16. 答案为: ①②

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解: (1) $\because \sqrt{7}(a\cos B + b\cos A) = ac$,

根据正弦定理得, $\sin A \cos B + \sin B \cos A = \frac{\sqrt{7}}{7} a \sin C$, $\therefore \sin C = \frac{\sqrt{7}}{7} a \sin C$,

又 $\because \sin C \neq 0$, $\therefore a = \sqrt{7}$.

$\because \sin 2A = \sin A$, $\therefore 2\sin A \cos A = \sin A$, $\because \sin A \neq 0$, $\therefore \cos A = \frac{1}{2}$, $\because A \in (0, \pi)$,

$\therefore A = \frac{\pi}{3}$5 分

(2) 由 (1) 知, $a = \sqrt{7}$, $A = \frac{\pi}{3}$. 由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,

$$\therefore 7 = b^2 + c^2 - bc, \therefore 7 = (b - c)^2 + bc,$$

$\because b - c = 2$, $\therefore 7 = 4 + bc$, $\therefore bc = 3$. 设 BC 边上的高为 h .

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ah, \therefore \frac{1}{2} \times \sqrt{7} h = \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore h = \frac{3\sqrt{21}}{14}. \text{10 分}$$

18. 解: (1) 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $a_{n+1} = 2a_n + 1$, 整理得: $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$,

由 $a_1 + 2a_2 = a_3 = 2a_2 + 1$, 解得 $a_1 = 1$,

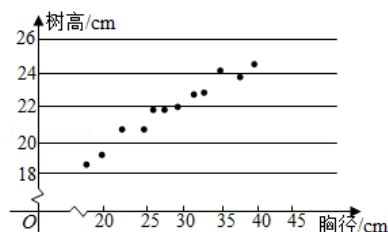
故数列 $\{a_n + 1\}$ 是以 $a_1 + 1 = 2$ 为首项, 2 为公比的等比数列; 所以

$$a_n = 2^n - 1. \text{6 分}$$

$$(2) \text{ 由于 } a_n = 2^n - 1, \text{ 所以 } S_n = 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n - n = \frac{2 \times (2^n - 1)}{2 - 1} - n = 2^{n+1} - 2 - n,$$

由于 $S_n \leq 121$, 所以 $2^{n+1} - 2 - n \leq 121$, 即 $2^{n+1} - n \leq 123$, 解得 $1 \leq n \leq 6$, 故 n 的最大值为 6.12 分

19. 解: (1) 散点图如图,



.....2 分

(2) 由散点图可以看出, 当胸径 x 由小变大时, 树高 y 也由小变大,

而 x 与 y 之间是正相关关系, 由表中数据可得,

$$\bar{x} = \frac{1}{12} (18.1+20.1+22.2+24.4+26.0+28.3+29.6+32.4+33.7+35.7+38.3+40.2) = \frac{349}{12} \approx$$

29.08,

$$\bar{y} = \frac{1}{12} (18.8+19.2+21.0+21.0+22.1+22.1+22.4+22.6+23.0+24.3+23.9+24.7) = \frac{265.1}{12} \approx$$

22.09.

$$\text{从而 } b = \frac{\sum_{i=1}^{12} x_i y_i - 12 \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^{12} x_i^2 - 12 \bar{x}^2} \approx \frac{7851.03 - 12 \times 29.08 \times 22.09}{10715.74 - 12 \times 29.08^2} \approx \frac{142.50}{567.98} \approx 0.25.$$

$$a = \bar{y} - b \bar{x} \approx 22.09 - 0.25 \times 29.08 = 14.82. \quad \therefore y \text{ 关于 } x \text{ 的线性回归方程为}$$

$$y = 0.25x + 14.82; \quad \dots 10 \text{ 分}$$

$$(3) \text{ 当 } x = 50.6 \text{ 时, } y = 0.25 \times 50.6 + 14.82 = 27.47.$$

即 当 树 的 胸 径 为 50.6cm 时 , 树 的 高 度 约 为
27.47cm.12 分

20. (1) 证明: 因为 $ABC - A_1B_1C_1$ 为三棱柱, 所以平面 $A_1B_1C_1 \parallel$ 平面 ABC ,

因为 $CC_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$, 所以 $CC_1 \perp$ 平面 ABC .

又因为 $AC \subset$ 平面 ABC , 所以 $AC \perp CC_1$.

又因为 $AC \perp BC$, $CC_1 \cap BC = C$, $CC_1, BC \subset$ 平面 BB_1C_1C ,

所以 $AC \perp$ 平面 BB_1C_1C .

由题知: 四边形 BB_1C_1C 为矩形, 又因 B_1C 交 BC_1 于点 E , 所以 E 为 B_1C 的中点,

又因为 D 为 AB_1 的中点, 所以 DE 为 $\triangle AB_1C$ 的中位线, 所以 $DE \parallel AC$,

所 以 $DE \perp$ 平 面 BB_1C_1C5 分

(2) 由 (1) 知: C_1A_1 、 C_1B_1 、 C_1C 两两互相垂直, 所以以 C_1 为坐标原点, 分别以 C_1A_1 、 C_1B_1 、 C_1C

为 x 、 y 、 z 轴建立空间直角坐标系 $C_1 - xyz$, 如图所示:

得 $f(x)$ 的最大值是 $f(3) = 1 - ae = -3$, 解得 $a = \frac{4}{e} > 0$, 舍去;

② $a > 0$ 时, $x \in (0, \frac{1}{a})$, $f'(x) > 0$, $x \in (\frac{1}{a}, e)$, $f'(x) < 0$,

$\therefore f(x)$ 的单调增区间是 $(0, \frac{1}{a})$, 单调减区间是 $(\frac{1}{a}, e)$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, e]$ 上的最大值为 -3 , $\therefore f(x)_{\max} = g(\frac{1}{a}) = -1 - \ln a = -3$, $\therefore a = e^2$.

综 上 : 存 在 a 符 合 题 意 , 此 时 $a = e^2$12 分

22. 解: (1) 由题意知 可得 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a^2 - b^2 = c^2$, $\frac{8}{3a^2} + \frac{1}{3b^2} = 1$, 解得 $a = 2$, $b = 1$,

则椭圆 C 的方程为: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$;3 分

(2) 由题意, 直线 MN 的斜率存在且不为 0, 设直线 MN 方程为 $y = kx + m$,

设点 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y = kx + m \end{cases}$, 整理可得 $(1 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0$,

$= 0$,

所以 $x_1 + x_2 = -\frac{8km}{1 + 4k^2}$, $x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 4}{1 + 4k^2}$ $y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 2m =$

$\frac{2m}{1 + 4k^2}$ 5 分

因为 $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OQ}$, 所以 $Q(\frac{-16km}{1 + 4k^2}, \frac{4m}{1 + 4k^2})$,

因为 Q 在椭圆上, 所以 $\frac{(\frac{-16km}{1 + 4k^2})^2}{4} + (\frac{4m}{1 + 4k^2})^2 = 1$, 化简得 $16m^2 = 1 + 4k^2$, 满足 $\Delta >$

0 ,7 分

又因为直线 HM 与直线 HN 倾斜角互补, 所以 $k_{HM} + k_{HN} = 0$, 所以 $\frac{y_1 + \frac{1}{2}}{x_1} + \frac{y_2 + \frac{1}{2}}{x_2} =$

0 ,8 分

所以 $\frac{kx_1 + m + \frac{1}{2}}{x_1} + \frac{kx_2 + m + \frac{1}{2}}{x_2} = 0$, 所以 $2kx_1x_2 + (m + \frac{1}{2})(x_1 + x_2) =$

0 ,10 分

所以 $\frac{4k(m+2)}{1+4k^2} = 0$ ，因为 $k \neq 0$ ，所以 $m = -2$ ，代入 $16m^2 = 1+4k^2$ 得 $k = \pm \frac{3\sqrt{7}}{2}$ ，.....11 分

所以存在满足条件的三个点，此时直线 MN 的方程为 $y = \frac{3\sqrt{7}}{2}x - 2$ 或 $y = -\frac{3\sqrt{7}}{2}x -$

2.12 分