2019年普通高等学校招生全国统一考试(江苏卷)信息预测卷(5月卷)

1.【答案】$\{-1,2\}$

【解题探究】本题重点考查集合的运算,容易出错的地方是审错题意,注意交集与并集的差异,属于基本题,难点系数较小.一要注意培养良好的答题习惯,避免出现粗心错误,二是明确江苏高考对于集合题的考查立足于列举法,强调对集合运算有关概念及法则的理解.

【解析】由交集的定义可得 $A\cap B=\{-1,2\}$

2.【答案】5

【解题探究】本题重点考查复数的基本运算和复数的概念,属于基本题.首先对于复数的四则运算,要切实掌握其运算技巧和常规思路,如 $\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$,$(a,b,c,d\in R)$.其次要熟悉复数相关基本概念,如复数 $a+bi(a,b\in R)$ 的实部为 a、虚部为 b、模为 $\sqrt{a^2+b^2}$、共轭复数为 $a-bi$

【解析】由复数乘法可得 $z=5+5i$,则的虚部是5.

3.【答案】32

【解题探究】本题考查的是抽样方法,重点考查了分层抽样,属于简单题.认真梳理统计学的基础理论,特别是系统抽样和分层抽样、频率分布直方图、方差,平均数等,针对训练近几年的江苏高考类似考题,直观了解本考点的考查方式,强化相关计算能力.

【解析】 $\frac{4}{4+4+3+5}n=8,n=32$.

4.【答案】$\frac{1}{6}$

【解题探究】本题考查的是古典概型,属于基础题.解题基本策略,通过枚举法、树形图解决计数问题,而当正面问题比较复杂时,往往采取计数其对立事件.针对训练近几年的江苏高考类似考题,直观了解本考点的考查方式,弱化记数方法,侧重于对古典概型和对立事件的概率考查.

【解析】基本事件数36种,其中点 P 在直线 $x+y=5$ 下方的基本事件.有6种,所以所求概率是 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

5.【答案】5

【解题探究】本题是算法与流程图的考查,侧重于对流程图循环结构的考查,先明晰算法及流程图的相关概念,包括选择结构、循环结构、伪代码,其次要重视循环起点条件、循环次数、循环终止条件,更要通过循环规律,明确流程图研究的数学问题,是求和还是求项.针对训练近几年的江苏高考类似考题,直观了解本考点的考查方式,侧重于对问题的模拟执行,且执行次数较少.

【解析】第一次循环:$n=2,S=3$;第二次循环:$n=3,S=7$;第三次循环:$n=4,S=15$.第四次循环:$n=5,S=31$,所以答案是5.

6.【答案】65

【解题探究】利用等差数列的前 n 项和公式及通项公式列出方程组,求出首项及公差,由此能求出前10项和.

【解析】$\because S_n$ 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和,

$a_3=4,S_9-S_6=27$,

$\therefore\begin{cases}a_1+2d=4\\9a_1+\frac{9\times8}{2}d-6a_1-\frac{6\times5}{2}d=27\end{cases}$,

解得 $a_1=2,d=1$,

$\therefore S_{10}=10\times2+\frac{10\times9}{2}\times1=65$.

7.【答案】3

【解题探究】分段函数是历年高考的必考内容,形式以三角函数、分式函数居多.本题主要考查诱导公式.

【解析】$f(f(2019))=f(2000)=2\cos\frac{2000\pi}{3}=2\cos\frac{2\pi}{3}=-1$,所以 $a=3$.

8.【答案】$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解题探究】由题意设出圆锥的底面半径,求出圆锥的侧面积,求出圆柱的侧面积即可得到圆柱的侧积面与圆锥的侧面积之比.

【解析】设圆锥的底面半径为 r,由题意圆锥底面半径等于圆锥的高,

可知圆锥的侧面积为:$\pi r\cdot\sqrt{2}r=\sqrt{2}\pi r^2$.

圆柱的侧面积为:$2\pi r\cdot r=2\pi r^2$.

所以圆锥的侧积面与圆柱的侧面积之比为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

9.【答案】$\frac{\sqrt{6}}{2}$

【解题探究】本题考查双曲线和抛物线的定义及几何性质,属于中档题.

【解析】抛物线 $y^2=2x$ 的准线为 $x=-\frac{1}{2}$,双曲线的两条渐近线为 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$,所以 $P\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)Q\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$,所以 $S=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

10.【答案】 $\frac{3}{4}$

【解题探究】本题是三角函数图象与性质的考查，属于基本题.

【解析】令 $5\cos 2x=2-\sin x$，即 $5(1-2\sin^2 x)=2-\sin x$，所以 $10\sin^2 x-\sin x-3=0$，

因为 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin x=\frac{3}{5}$，即 $\sin x_0=\frac{3}{5}$，

从而 $\tan x_0=\frac{3}{4}$.

11.【答案】 $-\sqrt{3}$

【解题探究】特殊位置处理

【解析】由题意，取 $M(0,2)$，$k_{AM}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，因为 $AE=AF$，所以

$k_{AN}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，过原点所以 $N(\sqrt{3},-1)$，所以 $k_{MN}=-\sqrt{3}$

12.【答案】 5

【解题探究】本题涉及平面向量数量积，平面向量基本定理等考点，侧重于平面向量数量积.一般有两个思路，一是建立直角坐标系，利用坐标研究向量数量积，此题可以利用菱形对角线互相垂直建系，用待定系数法求出相关顶点坐标，从而求得对角线长度；二是利用一组基底表示所有向量，两种实质相同，坐标法更易理解和化简.纵观近几年的江苏高考在向量部分考查，数量积是重点考查对象，而且都是以基本方法为主.另外本题还有意提醒考生对向量数量积的逆用.

【解析】O 不在 BC 的垂直平分线上，用数量积的余弦式，

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$

$=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$

$=\frac{OA^2+OB^2-AB^2}{2}-\frac{OA^2+OC^2-AC^2}{2}$

$=\frac{OB^2-OC^2-AB^2+AC^2}{2}$，

因为 $\overrightarrow{OB}^2-\overrightarrow{OC}^2=2$，所以答案是 5.

13.【答案】 $\left(\frac{16}{5},+\infty\right)$

【解题探究】本题是导数中切线问题，考查函数的切线平行，化归转化为导数值相等，从而研究二次方程有两个不同正根，通过韦达定理或者根据根的分布处理，问题关键是构建 x_1+x_2 与 k 的关系，利用 k 的取值范围做文章。

【解析】

$f'(x)=-4\left(\frac{1}{x}\right)^2+\left(k+\frac{4}{k}\right)\frac{1}{x}-1$

令 $g(t)=-4t^2+\left(k+\frac{4}{k}\right)t-1=a(t>0)$

则 t_1，t_2，使得 $g(t_1)=g(t_2)=a(t_1\neq t_2)$

即 $-1<a<\frac{\left(k+\frac{4}{k}\right)^2}{16}-1$ 恒成立

$\therefore t_1+t_2=\frac{k}{4}+\frac{1}{k}$，$t_1t_2=\frac{1+a}{4}$

$\therefore x_1+x_2=\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{t_1+t_2}{t_1t_2}=\frac{k+\frac{4}{k}}{1+a}>\frac{16}{k+\frac{4}{k}}$ 恒成立.

$\because k\geqslant 4$，$\therefore k+\frac{4}{k}\geqslant 5$，$\therefore \frac{16}{k+\frac{4}{k}}\leqslant\frac{16}{5}$

$\therefore x_1+x_2>\frac{16}{5}$

14.【答案】 $\lambda\leqslant\frac{4}{3}\sqrt{3}$

【解题探究】正弦定理和余弦定理的应用

【解析】由条件，$\lambda=-\frac{\sin A+\sin B}{\sin A\sin B}$.

又 $a+b=2c$，所以 $\sin A+\sin B=2\sin C$，

所以 $\frac{\sin A+\sin B}{2\sin C}=1$，

所以 $\lambda=-\frac{\sin A+\sin B}{\sin A\sin B}\times\frac{\sin A+\sin B}{2\sin C}$

$=-\frac{(a+b)^2}{2ab\sin C}=-\frac{2c^2}{ab\sin C}$

而 $\cos C=\frac{(a+b)^2-2ab-c^2}{2ab}=\frac{3c^2-2ab}{2ab}=\frac{3c^2}{2ab}-1$，

所以 $\frac{c^2}{ab}=\frac{2}{3}(1+\cos C)$.

由 $a+b=2c$，得 $\cos C\geqslant\frac{1}{2}$，即 $0<C\leqslant\frac{\pi}{3}$，

所以 $\lambda=-\frac{4}{3}\cdot\frac{1+\cos C}{\sin C}\leqslant-\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

15.【解题探究】本题主要考查两角和差公式、正弦定理、余弦定理、三角形面积公式等基础知识，同时考查运算求解能力.纵观近几年高考，以解三角形为背景，考查三角恒等变换是高考的热点题型..

(1)由 $\cos B=\frac{11}{14}$，$B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

得 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$， ………………………… 1 分

又 $2\sqrt{3}a\sin B=5c$，代入得 $3a=7c$，

由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，得 $3\sin A=7\sin C$， ………………………… 3 分

$3\sin A=7\sin(A+B)$，$3\sin A=7\sin A\cos B+7\cos A\sin B$，…

………………………………………………… 5 分

得 $\tan A=-\sqrt{3}$，$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\frac{2\pi}{3}$，7 分

(2) $AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos B=\frac{19}{4}$，9 分

$c^2+\left(\frac{7}{6}c\right)^2-2c\cdot\left(\frac{7}{6}c\right)\cdot\frac{11}{14}=\frac{19}{4}$，$c=3$，

则 $a=7$，…………………………………………… 11 分

$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times3\times7\times\frac{5\sqrt{3}}{14}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$. ………… 14 分

【名师点睛】三角函数是以角为自变量的函数，因此解三角函数题，首先从角进行分析，善于用已知角表示所求角，即注重角的变换.角的变换涉及诱导公式、同角三角函数关系、两角和与差公式、二倍角公式、配角公式等，选用恰当的公式，是解决三角问题的关键，明确角的范围，对开方时正负取舍是解题正确的保证.

16.【解题探究】本题主要考查线面，面面平行，垂直的判定与性质.

【解析】(1)因为 BD 垂直平分 AC，所以 $BA=BC$，

在 $\triangle ABC$ 中，因为 $\angle ABC=120°$，

所以 $\angle BAC=30°$. …………………………………… 2 分

因为 $\triangle ACD$ 是正三角形，所以 $\angle DAC=60°$，

所以 $\angle BAD=90°$，即 $AD\perp AB$.……………………………… 3 分

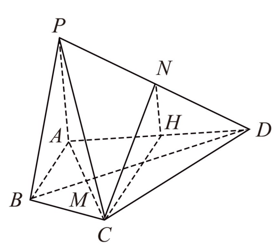
因为 $AB=1$，$\angle ABC=120°$，所以 $AD=AC=\sqrt{3}$，

又因为 $PA=1$，$PD=2$，由 $PA^2+AD^2=PD^2$，

知 $\angle PAD=90°$，即 $AD\perp AP$. ……………………………… 5 分

因为 AB，$AP\subset$ 平面 PAB，$AB\cap AP=A$，

所以 $AD\perp$ 平面 PAB.7 分



(2)取 AD 的中点 H，连结 CH，NH.

因为 N 为 PD 的中点，所以 $HN\parallel PA$，

因为 $PA\subset$ 平面 PAB，$HN\not\subset$ 平面 PAB，

所以 $HN\parallel$ 平面 PAB.9 分

由 $\triangle ACD$ 是正三角形，H 为 AD 的中点，

所以 $CH\perp AD$.

由(1)知 $BA\perp AD$，所以 $CH\parallel BA$，

因为 $BA\subset$ 平面 PAB，$CH\not\subset$ 平面 PAB，

所以 $CH\parallel$ 平面 PAB. …………………………………… 11 分

因为 CH，$HN\subset$ 平面 CNH，$CH\cap HN=H$，，

所以平面 $CNH\parallel$ 平面 PAB.1 ……………………… 3 分

因为 $CN\subset$ 平面 CNH，

所以 $CN\parallel$ 平面 PAB. …………………………………… 14 分

【名师点睛】垂直、平行关系证明中应用转化与化归思想的常见类型.

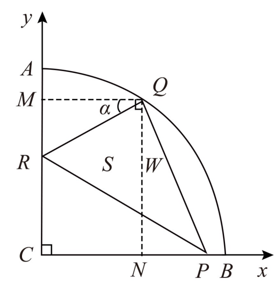
(1)证明线面、面面平行，需转化为证明线线平行.

(2)证明线面垂直，需转化为证明线线垂直.

(3)证明线线垂直，需转化为证明线面垂直.

(4)证明面面垂直，需转化为证明线面垂直，进而转化为证明线线垂直.

17.【解题探究】考查函数的概念，三角函数，基本不等式，直线方程，导数等知识，侧重于考查函数建模，解模的能力.纵观近几年高考，应用问题属于必考题型，常见以图形为背景，如果以平面图形为背景，策略上大致可分为结合三角函数建立关系或者结合建系，通过求坐标，方程来建立关系，解模主要是以导数，基本不等式为主，在建立目标函数后要注意实际问题中的定义域问题.



【解析】(1)如图，建立平面直角坐标系过 Q 作 $QM\perp AC$ 垂足为 M，作 $QN\perp BC$ 垂足为 N，

所以 $\triangle RMQ\backsim\Delta PNQ$，并且相似比为 1∶2，

所以 $x_Q:y_Q=1:2$，即点 Q 在直线 $y=2x$，

又因为 Q 在圆 $x^2+y^2=100$ 上

所以 $x_Q=2\sqrt{5}$　$y_Q=4\sqrt{5}$ ………………………………… 3 分

设 RQ 由 MQ 逆时针转过的角 $\angle RQM$ 的大小为 α，

则 $RQ=\frac{2\sqrt{5}}{\cos\alpha}$，

且 $\alpha_1<\alpha<\alpha_2$(其中 $\tan\alpha_1=2-\sqrt{5}$，$\tan\alpha_2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$)

所以 $S_{\triangle PQR}=RQ^2=\frac{20}{\cos^2\alpha}$，

所以当 $\alpha=0$ 时面积最小为 20. ……………………… 6 分

(2)建立如上平面直角坐标系，过 Q 作 $QM\perp AC$ 垂足为 M，作 $QN\perp BC$ 垂足为 N，

所以 $\triangle RMQ\backsim\triangle PNQ$，并且相似比为 1∶$\lambda$，

所以 $x_Q:y_Q=1:\lambda$，

又因为点 Q 在圆 $x^2+y^2=100$ 上，

代入计算得 $x_Q^2=\frac{100}{1+\lambda^2}$，$y_Q^2=\frac{100\lambda^2}{1+\lambda^2}$8 分

设 RQ 由 MQ 逆时针转过的角 $\angle RQM$ 的大小为 α，

当 M 与 A 重合时设 $\angle RQM=\alpha_1$，当 P 与 B 重合时设 $\angle RQM=\alpha_2$，则 $\alpha_1<\alpha<\alpha_2$，

此时 $RQ=\frac{MQ}{\cos\alpha}$，所以 $RQ^2=\frac{100}{(\lambda^2+1)\cos^2\alpha}$ ………… 11 分

可求得：$S_{\triangle PQR}=\frac{\lambda}{2}RQ^2=\frac{50\lambda}{(\lambda^2+1)\cos^2\alpha}$，

$\therefore S_{\min}=\frac{50\lambda}{\lambda^2+1}\geq 20$，

解得：$\frac{1}{2}\leq\lambda\leq 2$

所以 λ 的取值范围：$\left[\frac{1}{2},2\right]$ …………………………… 14 分

【名师点睛】对应用题的训练，一般从读题、审题、剖析题目、寻找切入点方面进行强化，注重培养将文字语言转化为数学语言能力，强化构建数学模型的几种方法.而江苏应用题，往往需结合导数知识解决相应数学最值问题，因此掌握利用导数求最值方法是一项基本要求，需熟练掌握.

18.【解题探究】本题主要考查椭圆方程，椭圆几何性质，以及直线与椭圆的位置关系，着重考查学生分析问题及计算能力.

【解析】解：(1)焦距 $2c=2$，$\therefore c=1$.

又离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore a=\sqrt{2}$.

$\therefore b^2=a^2-c^2=1$.$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.　4 分

(2)设 $A(x_0,y_0)$，则 $2y_0^2=2-x_0^2$，$B(-x_0,-y_0)$，$k=\frac{y_0}{x_0}$.

右准线方程为 $x=2$，$\therefore M(2,0)$.　………………………… 6 分

$\therefore AM$ 方程为 $y=\frac{y_0}{x_0-2}(x-2)$，

与椭圆方程 $x^2+2y^2=2$ 联立得：

$(x_0-2)^2x^2+2y_0^2(x-2)^2-2(x_0-2)^2=0$，该方程的两个根为 x_0 与 x_{A1}.　8 分

$\therefore x_0\cdot x_{A1}=\frac{8y_0^2-2(x_0-2)^2}{(x_0-2)^2+2y_0^2}=\frac{4(2-x_0^2)-2(x_0-2)^2}{(x_0-2)^2+2-x_0^2}$

$=\frac{4-3x_0}{3-2x_0}\cdot x_0$.

显然 $x_0\neq 0$，$\therefore x_{A1}=\frac{4-3x_0}{3-2x_0}$.

$\therefore y_{A1}=\frac{y_0}{x_0-2}(x_{A1}-2)=\frac{y_0}{3-2x_0}$. ………………………… 11 分

即 $A_1\left(\frac{4-3x_0}{3-2x_0},\frac{y_0}{3-2x_0}\right)$，同理 $B_1\left(\frac{4+3x_0}{3+2x_0},\frac{-y_0}{3+2x_0}\right)$ ……………………………………………………… 14 分

$\therefore k_1=\frac{-6y_0}{2x_0}=-3k$.即存在 $\lambda=-3$，有 $k_1=\lambda k$. … 16 分

【名师点睛】在涉及到直线与椭圆的位置关系时，根据所求问题的特征，选择合理的解决策略，是解决解析几何问题的关键步骤.

19.【解题探究】本小题考查函数的极值、导数研究函数的单调性、零点存在性定理等基础知识，考查分析问题、解决问题的能力.

【解析】(1)由题意，$f(x)=\left(2+\frac{1}{x}\right)e^x$，$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{(2x-1)(x+1)}{x^2}e^x$，

列表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	↘	极小值	↗

由表可知 $f(x)$ 的极大值是 $f(-1)=\frac{1}{e}$；

$f(x)$ 的极小值是 $f\left(\frac{1}{2}\right)=4\sqrt{e}$.　4 分

(2)由题意，对任意 $x\in(0,+\infty)$，$(x-1)e^x\geq\left(1+\frac{n}{x}\right)e^x+1$，

所以 $n\leq x^2-2x-\frac{x}{e^x}$.

设 $h(x)=x^2-2x-\frac{x}{e^x}$，则 $h'(x)=\frac{(x-1)(2e^x+1)}{e^x}$，

$x\in(0,1)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减；

$x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增；

所以 $h(x)$ 的最小值是 $h(1)=-1-\frac{1}{e}$，则 $n\leq-1-\frac{1}{e}$，所以 n 的最大值是 $-1-\frac{1}{e}$.　7 分

(3)由题意，$h(x)=\frac{ax^2+bx+1}{e^x}$，令 $h(x)=1$，

得 $e^x=ax^2+bx+1$，

令 $T(x)=e^x-ax^2-bx-1$，则可知 $T(0)=T(1)=0$

设 x_0 为 $T(x)$ 在 $(0,1)$ 内的一个零点，

由 $T(0)=T(1)=0$ 可知 $T(x)$ 在 $(0,x_0)$ 和 $(x_0,1)$ 上都不单调.

设 $M(x)=T'(x)=e^x-2ax-b$，则 $M(x)$ 在 $(0,x_0)$ 和 $(x_0,1)$ 上均存在零点，即 $M(x)$ 在 $(0,1)$ 上至少有两个零点.　9 分

由 $M'(x)=e^x-2a$，$x\in(0,1)$，可知：

当时 $a\leq\frac{1}{2}$ 时，$M'(x)>0$，$M(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，不合题意；

当 $a\geq\frac{e}{2}$ 时，$M'(x)<0$，$M(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，不合题意；

当 $\frac{1}{2}<a<\frac{e}{2}$ 时，令 $M'(x)=0$，得 $x=\ln(2a)\in(0,1)$，

所以 $M(x)$ 在 $(0,\ln(2a))$ 上递减，在 $(\ln(2a),1)$ 上递增，

…………………………………………………… 11 分

若 $M(x)$ 在 $(0,1)$ 上有两个零点，必有 $\begin{cases}M(\ln(2a))<0\\M(0)>0\\M(1)>0\end{cases}$.

由 $M(\ln(2a))=3a-2a\ln(2a)+1-e$，$\left(\frac{1}{2}<a<\frac{e}{2}\right)$

设 $\varphi(x)=\frac{3}{2}x-x\ln x+1-e$，$(1<x<e)$，则 $\varphi'(x)=\frac{1}{2}-\ln x$，令 $\varphi(x)=0$，得 $x=\sqrt{e}$.

所以：当 $1<x<\sqrt{e}$ 时，$\varphi(x)>0$，$\varphi(x)$ 在 $(1,\sqrt{e})$ 上单调递增；

当 $\sqrt{e}<x<e$ 时，$\varphi(x)<0$，$\varphi(x)$ 在 $(\sqrt{e},e)$ 上单调递减.

则 $\varphi_{\max}(x)=\varphi(\sqrt{e})=\sqrt{e}+1-e<0$，所以 $M(\ln(2a))<0$ 恒成立. …………………………………………… 14 分

所以 $\begin{cases}M(0)=1-b=a-e+2>0\\M(1)=e-2a-b=1-a>0\end{cases}$，得 $e-2<a<1$. ……

…………………………………………………… 16 分

【名师点睛】对于函数零点个数问题，可利用函数的值域或最值，结合函数的单调性、草图确定其中参数范围.从图象的最高点、最低点，分析函数的最值、极值；从图象的对称性，分析函数的奇偶性；从图象的走向趋势，分析函数的单调性、周期性等.但需注意探求与论证之间区别，论证是充要关系，要充分利用零点存在定理及函数单调性严格说明函数零点个数.

20.【解题探究】本题旨在考查数列的概念、等比数列的通项公式与求和公式、不等式的求解等基本性质.考查学生创新意识.

【解析】(1)设 $\{a_n\}$ 的公比是 q，$\because f_2(1)=a_1+2a_2=2$，$f_2(2)=a_2+2a_3=a_1q+2a_2q=1$，

$\therefore q=\frac{1}{2}$，$a_1=1$.$\therefore a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$.

又 $\because f_n(n)=a_n+2a_{n+1}+3a_{n+2}+\cdots+na_{2n-1}$，

$\therefore \frac{1}{2}f_n(n)=a_{n+1}+2a_{n+2}+\cdots+(n-1)a_{2n-1}+na_{2n}$.

两式相减得 $\frac{1}{2}f_n(n)=a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{2n-1}-na_{2n}=$

$\dfrac{a_n-a_{2n-1}\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-na_{2n}=2a_n-a_{2n-1}-na_{2n}$.

$\therefore f_n(n)=4a_n-2a_{2n-1}-2na_{2n}=\frac{1}{2^{n-3}}-\frac{1}{2^{2n-3}}-\frac{n}{2^{2n-2}}$.

故数列数列 $\{a_n\}$ 的 $n-n$ 阶和为 $\frac{1}{2^{n-3}}-\frac{1}{2^{2n-3}}-\frac{n}{2^{2n-2}}$.

…………………………………………………… 6 分

(2)由题 $g_5(n)=b_n+2b_{n+1}+3b_{n+2}+4b_{n+3}+5b_{n+4}$，

$g_5(n+1)=b_{n+1}+2b_{n+2}+3b_{n+3}+4b_{n+4}+5b_{n+5}$，$g_5(n+3)=b_{n+3}+2b_{n+4}+3b_{n+5}+4b_{n+6}+5b_{n+7}$.

$\therefore g_5(n+3)-3g_5(n+1)+2g_5(n)=\sum\limits_{i=0}^{4}(b_{n+3+i}-3b_{n+1+i}+2b_{n+i})$. 8 分

$\because \forall n\in N^*$，$b_{n+3}\geqslant 3b_{n+1}-2b_n$，

$\therefore b_{n+3+i}-3b_{n+1+i}+2b_{n+i}\geqslant 0$，$\forall n\in N^*$，$i=0,1,2,3,4$

又 $\because g_5(n+3)-3g_5(n+1)+2g_5(n)=[g_5(n+3)-g_5(n+1)]-2[g_5(n+1)-g_5(n)]=0$

$\therefore 0=g_5(n+3)-3g_5(n+1)+2g_5(n)=\sum\limits_{i=0}^{4}(b_{n+3+i}-3b_{n+1+i}+2b_{n+i})\geqslant 0$.故等号可取

$\therefore b_{n+3+i}-3b_{n+1+i}+2b_{n+i}=0$，$\forall n\in N^*$，$i=0,1,2,3,4$，

即 $\forall n\in N^*$，$b_{n+3}=3b_{n+1}-2b_n$. 1 ………………… 2 分

$\therefore g_5(n)=b_n+2b_{n+1}+3b_{n+2}+4(3b_{n+1}-2b_n)+5(3b_{n+2}-2b_{n+1})=-7b_n+4b_{n+1}+18b_{n+2}$

$\therefore g_5(n+1)=-7b_{n+1}+4b_{n+2}+18b_{n+3}=-7b_{n+1}+4b_{n+2}+18(3b_{n+1}-2b_n)=-36b_n+47b_{n+1}+4b_{n+2}$；

$\therefore g_5(n+2)=-36b_{n+1}+47b_{n+2}+4b_{n+3}=-36b_{n+1}+47b_{n+2}+4(3b_{n+1}-2b_n)=-8b_n-24b_{n+1}+47b_{n+2}$

$\therefore g_5(n)+g_5(n+2)-2g_5(n+1)=-7b_n+4b_{n+1}+18b_{n+2}-8b_n-24b_{n+1}+47b_{n+2}-2(-36b_n+47b_{n+1}+4b_{n+2})$

$=57b_n-114b_{n+1}+57b_{n+2}=57(b_n-2b_{n+1}+b_{n+2})=0$.

$\therefore b_n-2b_{n+1}+b_{n+2}=0$，$\forall n\in N^*$.

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 为等差数列. (1 ………………………… 6 分)

【名师点睛】本题主要考查数列与不等式，方程等基础知识和基本技能，分类讨论、函数与方程思想，运算求解能力，要注意强化学生对问题本质的理解.

21.A.选修 4－2：矩阵与变换

【解题探究】本小题主要考查逆矩阵和特征值，特征向量等基础知识，考查运算求解能力.

【解析】解：(1)设 $M=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，由 $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=8\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 及 $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\8\end{bmatrix}$，

得 $\begin{cases}a+b=8\\c+d=8\\-a+3b=0\\-c+3d=8\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=6\\b=2\\c=4\\d=4\end{cases}$，$\therefore M=\begin{bmatrix}6&2\\4&4\end{bmatrix}$ 4 分

(2)设原曲线上任一点 $P(x,y)$ 在 M 作用下对应点 $P'(x',y')$，

则 $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&2\\4&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，即 $\begin{cases}x'=6x+2y\\y'=4x+4y\end{cases}$，

解之得 $\begin{cases}x=\dfrac{2x'-y'}{8}\\y=\dfrac{-2x'+3y'}{8}\end{cases}$

代入得 $x+3y-2=0$ 得 $x'-2y'+4=0$，

即曲线 $x+3y-2=0$ 在 M 的作用下的新曲线方程为 $x-2y+4=0$. 10 分

B.选修 4—4：极坐标与参数方程

【解题探究】本小题主要考查直线的极坐标方程与抛物线参数方程等基础知识，考查运算求解能力.先将极坐标方程和参数方程化归为直角坐标方程，然后转化为直线与抛物线相交弦长问题.

【解析】法一：将曲线 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{8}t^2,\\y=t\end{cases}$（$t$ 为参数）化为普通方程为 $y^2=8x$. …………………………………… 3 分

将直线 $\begin{cases}x=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}l,\\y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}l\end{cases}$（$l$ 为参数）代入 $y^2=8x$ 得，

$l^2-8\sqrt{2}l+24=0$， …… 6 分 解得 $l_1=2\sqrt{2}$，$l_2=6\sqrt{2}$.

则 $|l_1-l_2|=4\sqrt{2}$，

所以线段 AB 的长为 $4\sqrt{2}$. 10 分

法二：将曲线 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{8}t^2,\\y=t\end{cases}$（$t$ 为参数）化为普通方程为 $y^2=8x$，

…………………………………… 3 分

将直线 $\begin{cases}x=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}l,\\y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}l\end{cases}$（$l$ 为参数）化为普通方程为 $x-y+\dfrac{3}{2}=0$， …………………………………… 6 分

由 $\begin{cases}y^2=8x,\\x-y+\dfrac{3}{2}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\dfrac{9}{2},\\y=6.\end{cases}$

所以 AB 的长为 $\sqrt{\left(\dfrac{9}{2}-\dfrac{1}{2}\right)^2+(6-2)^2}=4\sqrt{2}$. 10 分

22.【解析】(1)设“至少演唱 1 首原创新曲”为事件 A，则事件 A 的对立事件 $\overline{A}$ 为：“没有 1 首原创新曲被演唱”.

所以 $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\dfrac{C_5^4}{C_8^4}=\dfrac{13}{14}$.

答：该乐队至少演唱 1 首原创新曲的概率为 $\dfrac{13}{14}$. 4 分

(2)设随机变量 x 表示被演唱的原创新曲的首数，则 x 的所有可能值为 0，1，2，3.

依题意，$X=ax+2a(4-x)$，故 x 的所有可能值依次为 $8a$，$7a$，$6a$，$5a$.

则 $P(X=8a)=P(x=0)=\dfrac{C_5^4}{C_8^4}=\dfrac{1}{14}$，

$P(X=7a)=P(x=1)=\dfrac{C_3^1C_5^3}{C_8^4}=\dfrac{3}{7}$，

$P(X=6a)=P(x=2)=\dfrac{C_3^2C_5^2}{C_8^4}=\dfrac{3}{7}$，

$P(X=5a)=P(x=3)=\dfrac{C_3^3C_5^1}{C_8^4}=\dfrac{1}{14}$.

从而 X 的概率分布为：

X	$8a$	$7a$	$6a$	$5a$
P	$\dfrac{1}{14}$	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{1}{14}$

8 分

所以 X 的数学期望 $E(X)=8a\times\dfrac{1}{14}+7a\times\dfrac{3}{7}+6a\times\dfrac{3}{7}+5a\times\dfrac{1}{14}=\dfrac{13}{2}a$. …………………… 10 分

23.【解题探究】本题主要考查二项式定理，数列等基础知识，考查运算求解、分析探究及推理论证的能力.

【解析】(1)$S_2^2=8$，$S_2^4=32$；…………………… 3 分

(2)设集合 $P=\{0\}$，$Q=\{-1,1\}$.

若 $|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|=1$，即 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$ 中有 $n-1$ 个取自集合 P，1 个取自集合 Q，

故共有 $C_n^{n-1}2^1$ 种可能，即为 $C_n^12^1$，

同理，$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|=2$，即 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$ 中有 $n-2$ 个取自集合 P，2 个取自集合 Q，

故共有 $C_n^{n-2}2^2$ 种可能，即为 $C_n^22^2$， ……………… 5 分

若 $|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|=m$，即 $x_1,x_2x_3,\cdots,x_n$ 中有 $n-m$ 个取自集合 P，m 个取自集合 Q，故共有 $C_n^{n-m}2^m$ 种可能，即为 $C_n^m2^m$，所以 $S_m^n=C_n^12^1+C_n^22^2+\cdots+C_n^m2^m$，

因为当 $0\leq k\leq n$ 时，$C_n^k\geq1$，故 $C_n^k-1\geq0$

所以 $S_m^n=C_n^12^1+C_n^22^2+\cdots+C_n^m2^m<C_n^02^0+(C_n^12^1+C_n^22^2+\cdots+C_n^m2^m)+(C_n^{m+1}-1)2^{m+1}+\cdots+(C_n^n-1)2^n$

$=(C_n^02^0+C_n^12^1+C_n^22^2+\cdots+C_n^m2^m+C_n^{m+1}2^{m+1}+\cdots+C_n^n2^n)-(2^{m+1}+2^{m+2}\cdots+2^n)$

$=(1+2)^n-(2^{n+1}-2^{m+1})=3^n-2^{n+1}+2^{m+1}$. 10 分