# 江苏省仪征中学 2018-2019 学年第二学期期初测试

## 高　三　数　学（Ⅰ）

2019. 2. 23

**一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，计 70 分. 不需写出解答过程，请把答案写在答题纸的指定位置上.**

**1．** 已知集合 $A=\{1,3\}$， $B=\{0,1\}$，则集合 $A\cup B=$___▲___.

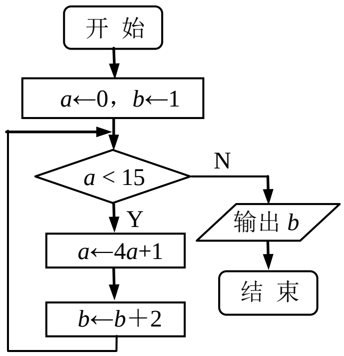
**2．** 已知复数 $z=\dfrac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}-3\mathrm{i}$ （i 为虚数单位），则复数 $z$ 的模为___▲___.

**3．** 某中学组织学生参加社会实践活动，高二（1）班 50 名学生参加活动的次数统计如下：

| 次数 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 人数 | 20 | 15 | 10 | 5 |

则平均每人参加活动的次数为___▲___.

**4．** 如图是一个算法流程图，则输出的 $b$ 的值为___▲___.




（第 4 题）

**5．** 有数学、物理、化学三个兴趣小组，甲、乙两位同学各随机参加一个，则这两位同学参加不同兴趣小组的概率为___▲___.

**6．** 已知正四棱柱的底面边长是 3 cm，侧面的对角线长是 $3\sqrt{5}$ cm，则这个正四棱柱的体积为___▲___$\text{cm}^3$.

**7．** 若实数 $x$，$y$ 满足 $x\leqslant y\leqslant 2x+3$，则 $x+y$ 的最小值为___▲___.

**8．** 在平面直角坐标系 $xOy$ 中，已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的准线为 $l$，直线 $l$ 与双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 的两条渐近线分别交于 $A$，$B$ 两点，$AB=\sqrt{6}$，则 $p$ 的值为___▲___.

**9．** 在平面直角坐标系 $xOy$ 中，已知直线 $y=3x+t$ 与曲线 $y=a\sin x+b\cos x\left(a,b,t\in\mathbf{R}\right)$ 相切于点 $(0,1)$，则 $(a+b)t$ 的值为___▲___.

**10．** 已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，有下列四个命题：

①数列 $\{|a_n|\}$ 是等比数列；　　②数列 $\{a_na_{n+1}\}$ 是等比数列；

③数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 是等比数列；　　④数列 $\{\lg a_n^2\}$ 是等比数列.

其中正确的命题有___▲___个.

**11．** 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(x+2)=f(x)$．当 $0<x\leqslant 1$ 时， $f(x)=x^3-ax+1$，则实数 $a$ 的值为___▲___.

**12**．在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$DA=DB$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=2$，则 $\left|\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AD}\right|$ 的最小值为__▲__.

**13**．在平面直角坐标系 $xOy$ 中，圆 $O:x^2+y^2=1$，圆 $C:(x-4)^2+y^2=4$．若存在过点 $P(m,0)$ 的直线 $l$，$l$ 被两圆截得的弦长相等，则实数 $m$ 的取值范围是__▲__.

**14**．已知函数 $f(x)=(2x+a)(|x-a|+|x+2a|)(a<0)$．若 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(672)=0$，则满足 $f(x)=2019$ 的 $x$ 的值为__▲__.

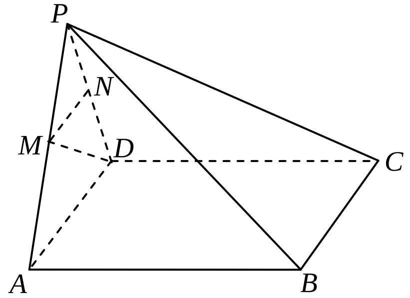
**二、解答题：本大题共 6 小题，计 90 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤，请把答案写在答题纸的指定区域内.**

**15**．（本小题满分 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$M$，$N$ 分别为棱 $PA$，$PD$ 的中点．已知侧面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是矩形，$DA=DP$．

求证：（1）$MN\parallel$ 平面 $PBC$；

（2）$MD\perp$ 平面 $PAB$．



（第 15 题）

**16**．（本小题满分 14 分）

在△$ABC$ 中，$a$，$b$，$c$ 分别为角 $A$，$B$，$C$ 所对边的长，$a\cos B=\sqrt{2}b\cos A$，$\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

（1）求角 $B$ 的值；

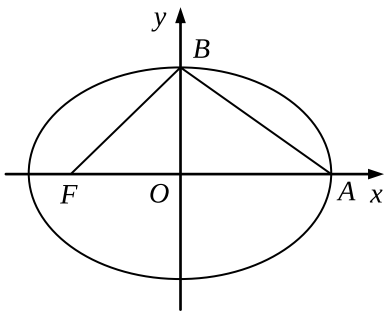
（2）若 $a=\sqrt{6}$，求△$ABC$ 的面积．

**17.**（本小题满分 14 分）

如图，在平面直角坐标系 $xOy$ 中，椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左焦点为 $F$，右顶点为 $A$，上顶点为 $B$.

（1）已知椭圆的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，线段 $AF$ 中点的横坐标为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，求椭圆的标准方程；

（2）已知△ $ABF$ 外接圆的圆心在直线 $y=-x$ 上，求椭圆的离心率 $e$ 的值.



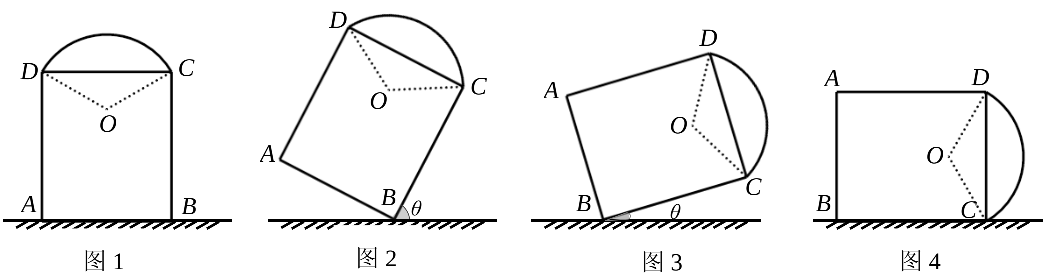

（第 17 题）

18.（本小题满分 16 分）

如图 1，一艺术拱门由两部分组成，下部为矩形 $ABCD$，$AB,AD$ 的长分别为 $2\sqrt{3}$ m 和 4 m，上部是圆心为 $O$ 的劣弧 $CD$，$\angle COD=\dfrac{2\pi}{3}$.

（1）求图 1 中拱门最高点到地面的距离；

（2）现欲以 $B$ 点为支点将拱门放倒，放倒过程中矩形 $ABCD$ 所在的平面始终与地面垂直，如图 2、图 3、图 4 所示．设 $BC$ 与地面水平线 $l$ 所成的角为 $\theta$．记拱门上的点到地面的最大距离为 $h$，试用 $\theta$ 的函数表示 $h$，并求出 $h$ 的最大值.




（第 18 题）

**19**.（本小题满分 16 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{a}{x}+\ln x\left(a\in\mathbf{R}\right)$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）设 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，若 $f(x)$ 有两个不相同的零点 $x_1$，$x_2$.

① 求实数 $a$ 的取值范围；

② 证明：$x_1 f'(x_1)+x_2 f'(x_2)>2\ln a+2$.

**20**.（本小题满分 16 分）

已知等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $a_4=4$，前 8 项和 $S_8=36$.

（1）求数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式；

（2）若数列 $\left\{b_n\right\}$ 满足 $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(b_k a_{2n+1-2k}\right)+2a_n=3(2^n-1),\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$.

① 证明：$\left\{b_n\right\}$ 为等比数列；

② 求集合 $\left\{(m，p)\left|\dfrac{a_m}{b_m}=\dfrac{3a_p}{b_p}，m，p\in\mathbf{N}^*\right.\right\}$.

# 江苏省仪征中学 2018-2019 学年第二学期期初测试

## 高　三　数　学（Ⅱ）

2018. 2. 23

**21.【选做题】**本题包括 **A**、**B**、**C** 三小题，请选定其中两题，并在答题卡相应的答题区域内作答．若多做，则按作答的前两题评分．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

**A．**［选修 4-2：矩阵与变换］（本小题满分 10 分）

已知矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$，且 $\left(\boldsymbol{MN}\right)^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{M}$．

**B．**［选修 4-4：坐标系与参数方程］（本小题满分 10 分）

在平面直角坐标系 $xOy$ 中，曲线 $C$ 的参数方程是 $\begin{cases} x=t, \\ y=t^2 \end{cases}$（$t$ 为参数）．以原点 $O$ 为极点，$x$ 轴正半轴为极轴建立极坐标系，直线 $l$ 的极坐标方程是 $\rho\sin(\theta-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$．

求：（1）直线 $l$ 的直角坐标方程；

（2）直线 $l$ 被曲线 $C$ 截得的线段长．

**【必做题】第 22、23 题，每小题 10 分，共计 20 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

22．(本小题满分 10 分)

“回文数”是指从左到右与从右到左读都一样的正整数，如 22，121，3553 等．显然 2 位“回文数”共 9 个：11，22，33，…，99．现从 9 个不同 2 位“回文数”中任取 1 个乘以 4，其结果记为 $X$；从 9 个不同 2 位“回文数”中任取 2 个相加，其结果记为 $Y$.

（1）求 $X$ 为“回文数”的概率；

（2）设随机变量 $\xi$ 表示 $X$，$Y$ 两数中“回文数”的个数，求 $\xi$ 的概率分布和数学期望 $E(\xi)$ .

23．(本小题满分 10 分)

设集合 $B$ 是集合 $A_n=\{1,2,3,\cdots,3n-2,3n-1,3n\}, n\in\mathbf{N}^*$ 的子集．记 $B$ 中所有元素的和为 $S$（规定：$B$ 为空集时，$S$=0）．若 $S$ 为 3 的整数倍，则称 $B$ 为 $A_n$ 的“和谐子集”.

求：（1）集合 $A_1$ 的“和谐子集”的个数；

（2）集合 $A_n$ 的“和谐子集”的个数.

# 江苏省仪征中学 2018-2019 学年第二学期期初测试高三数学答案

**一、填空题：**

**1**．$\{0,1,3\}$； **2**．$\sqrt{5}$； **3**． 3； **4**． 7； **5**． $\frac{2}{3}$； **6**．54； **7**． $-6$；

**8**． $2\sqrt{6}$； **9**． 4； **10**． 3； **11**． 2； **12**． $2\sqrt{5}$； **13**． $\left(-4,\frac{4}{3}\right)$； **14**． 337

**二、解答题：**

**15**．【证明】（1）在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$M$，$N$ 分别为棱 $PA$，$PD$ 的中点，

所以 $MN\parallel AD$．……………………2 分

又底面 $ABCD$ 是矩形，所以 $BC\parallel AD$．所以 $MN\parallel BC$．……………4 分

又 $BC\subset$ 平面$PBC$，$MN\not\subset$ 平面$PBC$，所以 $MN\parallel$ 平面 $PBC$．……………6 分

（2）因为底面 $ABCD$ 是矩形，所以 $AB\perp AD$．

又侧面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$，侧面 $PAD\cap$ 底面 $ABCD=AD$，$AB\subset$ 底面 $ABCD$，

所以 $AB\perp$ 侧面 $PAD$．…………………………………………………………8 分

又 $MD\subset$ 侧面 $PAD$，所以 $AB\perp MD$．……………………10 分

因为 $DA=DP$，又 $M$ 为 $AP$ 的中点，从而 $MD\perp PA$．……………………12 分

又 $PA$，$AB$ 在平面 $PAB$ 内，$PA\cap AB=A$，所以 $MD\perp$ 平面 $PAB$．…………14 分

**16**．【解】（1）在△$ABC$ 中，因为 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$0<A<\pi$，

所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{6}}{3}$．…………………………………………………2 分

因为 $a\cos B=\sqrt{2}b\cos A$，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得 $\sin A\cos B=\sqrt{2}\sin B\cos A$．

所以 $\cos B=\sin B$．…………………………………………………… 4 分

若 $\cos B=0$，则 $\sin B=0$，与 $\sin^2 B+\cos^2 B=1$ 矛盾，故 $\cos B\neq 0$．

于是 $\tan B=\frac{\sin B}{\cos B}=1$．又因为 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$．……………………7 分

（2）因为 $a=\sqrt{6}$，$\sin A=\frac{\sqrt{6}}{3}$，由（1）及正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得 $\frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}=\frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，

所以 $b=\frac{3\sqrt{2}}{2}$．…………………………………………………………9 分

又 $\sin C=\sin\left(\pi-A-B\right)=\sin\left(A+B\right)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$=\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6}$．……………………………………12 分

所以△ $ABC$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6}=\frac{6+3\sqrt{2}}{4}$．……14 分

**17**．【解】（1）因为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，所以 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，则 $a=2c$．

因为线段 $AF$ 中点的横坐标为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\frac{a-c}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

所以 $c=\sqrt{2}$，则 $a^2=8$，$b^2=a^2-c^2=6$．所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1$．……4 分

（2）因为 $A(a,0)$，$F(-c,0)$，所以线段 $AF$ 的中垂线方程为：$x=\frac{a-c}{2}$．

又因为△$ABF$外接圆的圆心$C$在直线$y=-x$上，所以$C(\frac{a-c}{2},-\frac{a-c}{2})$． …………6分

因为$A(a,0)$，$B(0,b)$，所以线段$AB$的中垂线方程为：$y-\frac{b}{2}=\frac{a}{b}(x-\frac{a}{2})$．

由$C$在线段$AB$的中垂线上，得$-\frac{a-c}{2}-\frac{b}{2}=\frac{a}{b}(\frac{a-c}{2}-\frac{a}{2})$，

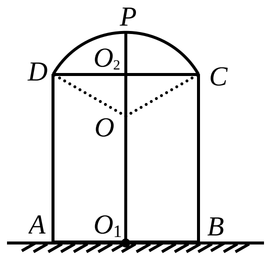
整理得，$b(a-c)+b^2=ac$，………………………………………………………………10分

即$(b-c)(a+b)=0$．

因为$a+b>0$，所以$b=c$．…………………………………………………………………12分

所以椭圆的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$． ……………………………………………………14分

18．【解】（1）如图，过$O$作与地面垂直的直线交$AB,CD$于点$O_1$，$O_2$，交劣弧$CD$于点$P$，$O_1P$的长即为拱门最高点到地面的距离．




在Rt△$O_2OC$中，$\angle O_2OC=\frac{\pi}{3}$，$CO_2=\sqrt{3}$，

所以$OO_2=1$，圆的半径$R=OC=2$．

所以$O_1P=R+OO_1=R+O_1O_2-OO_2=5$．

答：拱门最高点到地面的距离为$5\,\text{m}$． …………………4分

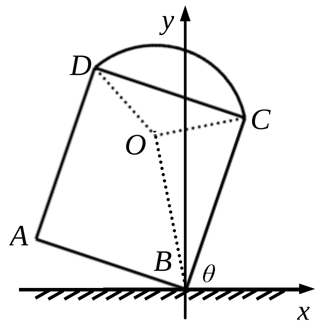
（2）在拱门放倒过程中，过点$O$作与地面垂直的直线与“拱门外框上沿”相交于点$P$．

当点$P$在劣弧$CD$上时，拱门上的点到地面的最大距离$h$等于圆$O$的半径长与圆心$O$到地面距离之和；

当点$P$在线段$AD$上时，拱门上的点到地面的最大距离$h$等于点$D$到地面的距离．

由（1）知，在Rt△$OO_1B$中，$OB=\sqrt{OO_1{}^2+O_1B^2}=2\sqrt{3}$．

以$B$为坐标原点，直线$l$为$x$轴，建立如图所示的坐标系．




ⅰ．当点$P$在劣弧$CD$上时，$\frac{\pi}{6}<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$．

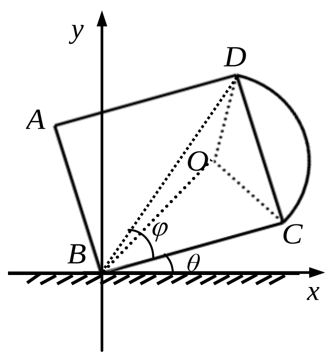
由$\angle OBx=\theta+\frac{\pi}{6}$，$OB=2\sqrt{3}$，

由三角函数定义，

得$O\left(2\sqrt{3}\cos(\theta+\frac{\pi}{6}),2\sqrt{3}\sin(\theta+\frac{\pi}{6})\right)$，

则$h=2+2\sqrt{3}\sin(\theta+\frac{\pi}{6})$． …………8分

所以当$\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$即$\theta=\frac{\pi}{3}$时，$h$最大值$2+2\sqrt{3}$． ……10分




ⅱ．当点$P$在线段$AD$上时，$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6}$．

设$\angle CBD=\varphi$，在Rt△$BCD$中，

$DB=\sqrt{BC^2+CD^2}=2\sqrt{7}$，

$\sin\varphi=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7},\cos\varphi=\frac{4}{2\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$．

由$\angle DBx=\theta+\varphi$，得$D\left(2\sqrt{7}\cos(\theta+\varphi),2\sqrt{7}\sin(\theta+\varphi)\right)$．

所以 $h=2\sqrt{7}\sin(\theta+\varphi)=4\sin\theta+2\sqrt{3}\cos\theta$．……………………………………14 分

又当 $0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$ 时，$h'=4\cos\theta-2\sqrt{3}\sin\theta>4\cos\dfrac{\pi}{6}-2\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}>0$．

所以 $h=4\sin\theta+2\sqrt{3}\cos\theta$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{6}]$ 上递增．所以当 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 时，$h$ 取得最大值 $5$．

因为 $2+2\sqrt{3}>5$，所以 $h$ 的最大值为 $2+2\sqrt{3}$．

答：$h=\begin{cases}4\sin\theta+2\sqrt{3}\cos\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{6},\\ 2+2\sqrt{3}\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6}),\ \dfrac{\pi}{6}<\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$；艺术拱门在放倒的过程中，拱门上的点到地面距离的最大值为（$2+2\sqrt{3}$）m．……………………………………16 分

**19**．【解】（1）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f'(x)=\dfrac{x-a}{x^2}$．

（1.1）当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 成立，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 为增函数；………2 分

（1.2）当 $a>0$ 时，

（i）当 $x>a$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上为增函数；

（ii）当 $0<x<a$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上为减函数．………4 分

（2）①由（1）知，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 至多一个零点，不合题意；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $f(a)$，

依题意知 $f(a)=1+\ln a<0$，解得 $0<a<\dfrac{1}{e}$．……………………………………6 分

一方面，由于 $1>a$，$f(1)=a>0$，$f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 为增函数，且函数 $f(x)$ 的图象在 $(a,1)$ 上不间断．所以 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上有唯一的一个零点．

另一方面，因为 $0<a<\dfrac{1}{e}$，所以 $0<a^2<a<\dfrac{1}{e}$．

$f(a^2)=\dfrac{1}{a}+\ln a^2=\dfrac{1}{a}+2\ln a$，令 $g(a)=\dfrac{1}{a}+2\ln a$，

当 $0<a<\dfrac{1}{e}$ 时，$g'(a)=-\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{2}{a}=\dfrac{2a-1}{a^2}<0$，

所以 $f(a^2)=g(a)=\dfrac{1}{a}+2\ln a>g\left(\dfrac{1}{e}\right)=e-2>0$

又 $f(a)<0$，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 为减函数，且函数 $f(x)$ 的图象在 $(a^2,a)$ 上不间断．

所以 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 有唯一的一个零点．

综上，实数 $a$ 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$．……………………………………10 分

② 设 $p=x_1f'(x_1)+x_2f'(x_2)=1-\dfrac{a}{x_1}+1-\dfrac{a}{x_2}=2-\left(\dfrac{a}{x_1}+\dfrac{a}{x_2}\right)$．

又 $\begin{cases}\ln x_1+\dfrac{a}{x_1}=0,\\ \ln x_2+\dfrac{a}{x_2}=0,\end{cases}$ 则 $p=2+\ln(x_1x_2)$．……………………………………12 分

下面证明 $x_1x_2>a^2$．

不妨设 $x_1<x_2$，由①知 $0<x_1<a<x_2$．

要证 $x_1x_2>a^2$，即证 $x_1>\dfrac{a^2}{x_2}$．

因为 $x_1$，$\dfrac{a^2}{x_2}\in(0,a)$， $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上为减函数，所以只要证 $f\left(\dfrac{a^2}{x_2}\right)>f(x_1)$．

又 $f(x_1)=f(x_2)=0$，即证 $f\left(\dfrac{a^2}{x_2}\right)>f(x_2)$． ……………………………………14 分

设函数 $F(x)=f\left(\dfrac{a^2}{x}\right)-f(x)=\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{x}-2\ln x+2\ln a\,(x>a)$．

所以 $F'(x)=\dfrac{(x-a)^2}{ax^2}>0$，所以 $F(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 为增函数.

所以 $F(x_2)>F(a)=0$，所以 $f\left(\dfrac{a^2}{x_2}\right)>f(x_2)$ 成立．从而 $x_1x_2>a^2$ 成立.

所以 $p=2+\ln(x_1x_2)>2\ln a+2$，即 $x_1f'(x_1)+x_2f'(x_2)>2\ln a+2$ 成立. …16 分

**20**．【解】（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$.

因为等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_4=4$，前 8 项和 $S_8=36$，所以 $\begin{cases}a_1+3d=4,\\ 8a_1+\dfrac{8\times7}{2}d=36\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a_1=1,\\ d=1.\end{cases}$

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n$． ……………………………………………3 分

（2）①设数列 $\{b_n\}$ 前 $n$ 项的和为 $B_n$．

由（1）及 $\sum\limits_{k=1}^{n}(b_ka_{2n+1-2k})+2a_n=3(2^n-1),(n\in\mathbf{N}^*)$ 得，

$$\begin{cases}3(2^n-1)=\sum\limits_{k=1}^{n}(b_ka_{2n+1-2k})+2n, & ③\\ 3(2^{n-1}-1)=\sum\limits_{k=1}^{n-1}(b_ka_{2n-1-2k})+2(n-1)(n\geqslant2), & ④\end{cases}$$

由③−④得

$$\begin{aligned}3(2^n-1)-3(2^{n-1}-1)&=(b_1a_{2n-1}+b_2a_{2n-3}+\cdots+b_{n-1}a_3+b_na_1+2n)\\&\quad-(b_1a_{2n-3}+b_2a_{2n-5}+\cdots+b_{n-1}a_1+2n-2)\\&=[b_1(a_{2n-3}+2)+b_2(a_{2n-5}+2)+\cdots+b_{n-1}(a_1+2)+b_na_1+2n]\\&\quad-(b_1a_{2n-3}+b_2a_{2n-5}+\cdots+b_{n-1}a_1+2n-2)\\&=2(b_1+b_2+\cdots+b_{n-1})+b_n+2=2(B_n-b_n)+b_n+2.\end{aligned}$$

所以 $3\cdot2^{n-1}=2B_n-b_n+2\ (n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$，

又 $3(2^1-1)=b_1a_1+2$，所以 $b_1=1$，满足上式.

所以 $2B_n-b_n+2=3\cdot2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$ ⑤……………………………………6 分

当 $n\geqslant2$ 时，$2B_{n-1}-b_{n-1}+2=3\cdot2^{n-2}$ ⑥

由⑤−⑥得，$b_n+b_{n-1}=3\cdot2^{n-2}$． ……………………………………………8 分

$b_n-2^{n-1}=-(b_{n-1}-2^{n-2})=\cdots=(-1)^{n-1}(b_1-2^0)=0$，

所以 $b_n=2^{n-1}$，$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=2$，

所以数列 $\{b_n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列. ……………………………10 分

②由 $\dfrac{a_m}{b_m}=\dfrac{3a_p}{b_p}$，得 $\dfrac{m}{2^{m-1}}=\dfrac{3p}{2^{p-1}}$，即 $2^{p-m}=\dfrac{3p}{m}$．

记 $c_n=\dfrac{a_n}{b_n}$，由①得，$c_n=\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{n}{2^{n-1}}$，

所以 $\dfrac{c_{n+1}}{c_n}=\dfrac{n+1}{2n}\leqslant 1$，所以 $c_n\geqslant c_{n+1}$（当且仅当 $n=1$ 时等号成立）.

由 $\dfrac{a_m}{b_m}=\dfrac{3a_p}{b_p}$，得 $c_m=3c_p>c_p$，

所以 $m<p$. ……………………………………………………………………12 分

设 $t=p-m\left(m,\ p,\ t\in\mathbf{N}^*\right)$，由 $2^{p-m}=\dfrac{3p}{m}$，得 $m=\dfrac{3t}{2^t-3}$.

当 $t=1$ 时，$m=-3$，不合题意；

当 $t=2$ 时，$m=6$，此时 $p=8$ 符合题意；

当 $t=3$ 时，$m=\dfrac{9}{5}$，不合题意；

当 $t=4$ 时，$m=\dfrac{12}{13}<1$，不合题意.

下面证明当 $t\geqslant 4, t\in\mathbf{N}^*$ 时，$m=\dfrac{3t}{2^t-3}<1$.

不妨设 $f\left(x\right)=2^x-3x-3\ \left(x\geqslant 4\right)$，

$f'\left(x\right)=2^x\ln 2-3>0$，

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left[4，+\infty\right)$ 上单调增函数，

所以 $f(x)\geqslant f(4)=1>0$，

所以当 $t\geqslant 4, t\in\mathbf{N}^*$ 时，$m=\dfrac{3t}{2^t-3}<1$，不合题意.

综上，所求集合 $\left\{(m，p)\left|\dfrac{a_m}{b_m}=\dfrac{3a_p}{b_p}，m，p\in\mathbf{N}^*\right.\right\}=\left\{\left(6,8\right)\right\}$. ………………16 分

**21．A．**【解】由题意，$\left(\boldsymbol{MN}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{MN}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$. ………………………4 分

因为 $\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{N}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$. ……………………………………………………6 分

所以矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. ……………………………………………10 分

**B.**【解】（1）直线 $l$ 的极坐标方程可化为 $\rho(\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{4})=\sqrt{2}$，即 $\rho\sin\theta-\rho\cos\theta=2$.

又 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，

所以直线 $l$ 的直角坐标方程为 $x-y+2=0$. ………………………………4 分

（2）曲线 $C$: $\begin{cases}x=t，\\ y=t^2\end{cases}$（$t$ 为参数）的普通方程为 $x^2=y$.

由 $\begin{cases}x^2=y，\\ x-y+2=0\end{cases}$，得 $x^2-x-2=0$，

所以直线 $l$ 与曲线 $C$ 的交点 $A(-1,1)$，$B(2，4)$. ……………………………………8 分

所以直线 $l$ 被曲线 $C$ 截得的线段长为 $AB=\sqrt{(-1-2)^2+(1-4)^2}=3\sqrt{2}$. ………10 分

22.【解】（1）记“$X$ 是‘回文数’”为事件 $A$.

9 个不同 2 位“回文数”乘以 4 的值依次为：44，88，132，176，220，264，308，352，396．其中“回文数”有：44，88．

所以，事件 $A$ 的概率 $P(A)=\dfrac{2}{9}$． ……………………………………………………3 分

（2）根据条件知，随机变量 $\xi$ 的所有可能取值为 0，1，2．

由（1）得 $P(A)=\dfrac{2}{9}$． ……………………………………………………………………5 分

设“$Y$ 是‘回文数’”为事件 $B$，则事件 $A$，$B$ 相互独立．

根据已知条件得，$P(B)=\dfrac{20}{C_9^2}=\dfrac{5}{9}$． $P(\xi=0)=P(\bar{A})P(\bar{B})=\left(1-\dfrac{2}{9}\right)\left(1-\dfrac{5}{9}\right)=\dfrac{28}{81}$；

$P(\xi=1)=P(\bar{A})P(B)+P(A)P(\bar{B})=\left(1-\dfrac{2}{9}\right)\dfrac{5}{9}+\dfrac{2}{9}\left(1-\dfrac{5}{9}\right)=\dfrac{43}{81}$；

$P(\xi=2)=P(A)P(B)=\dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{5}{9}=\dfrac{10}{81}$ ……………………………………………………8 分

所以，随机变量 $\xi$ 的概率分布为

| $\xi$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\dfrac{28}{81}$ | $\dfrac{43}{81}$ | $\dfrac{10}{81}$ |

所以，随机变量 $\xi$ 的数学期望为 $E(\xi)=0\times\dfrac{28}{81}+1\times\dfrac{43}{81}+2\times\dfrac{10}{81}=\dfrac{7}{9}$． ……………10 分

23【解】（1）集合 $A_1=\{1,2,3\}$ 的子集有：$\phi$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$，$\{1,2,3\}$．

其中所有元素和为 3 的整数倍的集合有：$\phi$，$\{3\}$，$\{1,2\}$，$\{1,2,3\}$．

所以 $A_1$ 的“和谐子集”的个数等于 4． ………………………………………………3 分

（2）记 $A_n$ 的“和谐子集”的个数等于 $a_n$，即 $A_n$ 有 $a_n$ 个所有元素和为 3 的整数倍的子集；另记 $A_n$ 有 $b_n$ 个所有元素和为 3 的整数倍余 1 的子集，有 $c_n$ 个所有元素和为 3 的整数倍余 2 的子集．

由（1）知，$a_1=4$，$b_1=2$，$c_1=2$．

集合 $A_{n+1}=\{1,2,3,\cdots,3n-2,3n-1,3n,3n+1,3n+2,3(n+1)\}$ 的“和谐子集”有以下四类（考察新增元素 $3n+1,3n+2,3(n+1)$）：

第一类　集合 $A_n=\{1,2,3,\cdots,3n-2,3n-1,3n\}$ 的“和谐子集”，共 $a_n$ 个；

第二类　仅含一个元素 $3(n+1)$ 的“和谐子集”，共 $a_n$ 个；

同时含两个元素 $3n+1,3n+2$ 的“和谐子集”，共 $a_n$ 个；

同时含三个元素 $3n+1,3n+2,3(n+1)$ 的“和谐子集”，共 $a_n$ 个；

第三类　仅含一个元素 $3n+1$ 的“和谐子集”，共 $c_n$ 个；

同时含两个元素 $3n+1,3(n+1)$ 的“和谐子集”，共 $c_n$ 个；

第四类　仅含一个元素 $3n+2$ 的“和谐子集”，共 $b_n$ 个；

同时含有两个元素 $3n+2,3(n+1)$ 的“和谐子集”，共 $b_n$ 个，

所以集合 $A_{n+1}$ 的“和谐子集”共有 $a_{n+1}=4a_n+2b_n+2c_n$ 个．

同理得 $b_{n+1}=4b_n+2c_n+2a_n$，$c_{n+1}=4c_n+2a_n+2b_n$． ……………………………7 分

$\therefore a_{n+1}-b_{n+1}=2(a_n-b_n)$，$a_1-b_1=2$，$\therefore$ 数列 $\{a_n-b_n\}$ 是以 2 为首项，公比为 2 的等比数列．

$\therefore a_n-b_n=2^n$．同理 $a_n-c_n=2^n$．又 $a_n+b_n+c_n=2^{3n}$，$\therefore a_n=\dfrac{2}{3}\times2^n+\dfrac{1}{3}\times2^{3n}$，$\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$． …10 分