关于“伪中点弦”的思考

扬州中学 225000 戚有建

1 问题的提出

题目 经过点 $P(1,1)$ 的直线 l 和双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 交于 A,B 两点，并且 P 是弦 AB 的中点，问直线 l 是否存在，如果存在，求出直线 l 的方程；如果不存在，说明理由.

对于这道题，我们都非常熟悉，可以用点差法来处理，解题过程如下：

解 当直线 l 的斜率不存在时，显然不满足要求；

当直线 l 的斜率存在时，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$（其中 $x_1\neq x_2$），则 $x_1^2-\frac{y_1^2}{2}=1$，$x_2^2-\frac{y_2^2}{2}=1$，两式相减得到 $x_2^2-x_1^2=\frac{y_2^2-y_1^2}{2}$，即 $\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=2$，即 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2(x_2+x_1)}{y_2+y_1}$.

因为点 $P(1,1)$ 是弦 AB 的中点，所以 $x_2+x_1=2$，$y_2+y_1=2$，所以 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=2$，即 $k_{AB}=2$，因此直线 l 的方程为 $y=2x-1$.

下面检验判别式 Δ，将 $y=2x-1$ 代入 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 得 $2x^2-4x+3=0$，因为 $\Delta=-8<0$，所以直线 l 不存在.

应该说用“点差法”来处理本题思路清晰，过程简洁（设而不求），但美中不足的是求得的直线却是“增根”（我们不妨称其为“伪中点弦”），这让我们感到有些遗憾，同时也让我们充满疑问：为什么用“点差法”求解的过程中会产生“伪中点弦”？“伪中点弦”$y=2x-1$ 的“真主人”是谁？“伪中点弦”有什么几何意义呢？

2 问题的思考

2.1 思考用“点差法”求解可能会产生“伪中点弦”的原因

实际上，直线 l 是否存在 $\Leftrightarrow$ 方程组

$$\begin{cases}x_1^2-\frac{y_1^2}{2}=1\\ x_2^2-\frac{y_2^2}{2}=1\\ \frac{x_1+x_2}{2}=1\\ \frac{y_1+y_2}{2}=1\end{cases}$$

（Ⅰ）是否有解，而在用“点差法”求解的过程中将要求降低了，降低为方程组

$$\begin{cases}x_1^2-\frac{y_1^2}{2}=x_2^2-\frac{y_2^2}{2}\\ \frac{x_1+x_2}{2}=1\\ \frac{y_1+y_2}{2}=1\end{cases}$$

（Ⅱ）是否有解，显然方程组（Ⅰ）和方程组（Ⅱ）并不等价，方程组（Ⅰ）的解一定满足方程组（Ⅱ），但是方程组（Ⅱ）的解不一定满足方程组（Ⅰ），例如 $x_1=3$，$y_1=5$，$x_2=-1$，$y_2=-3$ 是方程组（Ⅱ）的解，但不是是方程组（Ⅰ）的解. 所以用“点差法”求得的直线不一定就是所需的中点弦，前者只是后者的必要条件.

2.2 思考双曲线“伪中点弦”的“真主人”

虽然用“点差法”求得的直线 $y=2x-1$ 是双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 的经过点 $P(1,1)$ 的“伪中点弦”，但是直线 $y=2x-1$ 肯定也有其“道理”，那么直线 $y=2x-1$ 是怎样的双曲线的经过点 $P(1,1)$ 的“真中点弦”呢？

实际上，由上面的分析可以发现方程组

$$\begin{cases}x_1^2-\frac{y_1^2}{2}=x_2^2-\frac{y_2^2}{2}\\ \frac{x_1+x_2}{2}=1\\ \frac{y_1+y_2}{2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1^2-\frac{y_1^2}{2}=\lambda\\ x_2^2-\frac{y_2^2}{2}=\lambda\\ \frac{x_1+x_2}{2}=1\\ \frac{y_1+y_2}{2}=1\end{cases}$$

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

因此，直线 $y=2x-1$ 应该与双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=\lambda$ $(\lambda\neq 0)$ 有关，

下面检验判别式 Δ，将 $y=2x-1$ 代入 $x^2-\frac{y^2}{2}=\lambda$，$(\lambda\neq 0)$ 得 $2x^2-4x+2\lambda+1=0$，所以 $\Delta=8-16\lambda$，设 $\Delta=8-16\lambda>0$，则 $\lambda<\frac{1}{2}$，所以用“点差法”求得的“伪中点弦”$y=2x-1$ 的“真主人”是双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=\lambda$，$(\lambda<\frac{1}{2}$ 且 $\lambda\neq 0)$.

推广　已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$ 及 $P(x_0,y_0)$，其中 $0<\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}<1$，则用“点差法”求得的“伪中点弦”$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}$ 的“真主人”是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda\left(\lambda\neq 0;\frac{x_0^2}{a^2\lambda}-\frac{y_0^2}{b^2\lambda}>1\text{ 或}\frac{x_0^2}{a^2\lambda}-\frac{y_0^2}{b^2\lambda}<0\right)$.

证明　设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则

$$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=\lambda\\ \frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=\lambda\\ \frac{x_1+x_2}{2}=x_0\\ \frac{y_1+y_2}{2}=y_0\end{cases}$$

，由“点差法”可得 $k_{AB}=\frac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$，于是得到直线 AB 的方程为 $y-y_0=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)$，化简即 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}$，

下面检验判别式 Δ，

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda\\ \frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}\end{cases}$ 得 $\left(\frac{y_0^2}{a^2b^2}-\frac{x_0^2}{a^4}\right)x^2+\frac{2x_0}{a^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}\right)x-\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}\right)^2-\frac{\lambda y_0^2}{b^2}=0$，

所以 $\Delta=\left(\frac{2x_0}{a^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}\right)\right)^2+4\left(\frac{y_0^2}{a^2b^2}-\frac{x_0^2}{a^4}\right)\left(\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}\right)^2+\frac{\lambda y_0^2}{b^2}\right)=\frac{4y_0^2}{a^2b^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}-\lambda\right)$，

因为 $\frac{x_0^2}{a^2\lambda}-\frac{y_0^2}{b^2\lambda}>1$ 或 $\frac{x_0^2}{a^2\lambda}-\frac{y_0^2}{b^2\lambda}<0$

所以 $\Delta=\frac{4y_0^2}{a^2b^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}-\lambda\right)$

$=\frac{4y_0^2\lambda^2}{a^2b^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2\lambda}-\frac{y_0^2}{b^2\lambda}\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2\lambda}-\frac{y_0^2}{b^2\lambda}-1\right)>0$，所以“伪中点弦”$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}$ 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda$，$\left(\lambda\neq 0;\frac{x_0^2}{a^2\lambda}-\frac{y_0^2}{b^2\lambda}>1\text{ 或}\frac{x_0^2}{a^2\lambda}-\frac{y_0^2}{b^2\lambda}<0\right)$的经过点 $P(x_0,y_0)$ 的“真中点弦”.

2.3　类比思考椭圆、抛物线“伪中点弦”的“真主人”

关于椭圆，可得如下结论：

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 及 $P(x_0,y_0)$，其中 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}>1$，则用“点差法”求得的“伪中点弦”$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}$ 的“真主人”是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\lambda$，$\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}<\lambda\right)$.（注　不等式 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}>1$ 实际上表明 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 外；不等式 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}<\lambda$ 表明 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\lambda(\lambda>0)$ 内部）

同理，关于抛物线，有如下结论：

已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 及 $P(x_0,y_0)$，其中 $y_0^2>2px_0$，则用“点差法”求得的“伪中点弦”$y_0y-p(x+x_0)=y_0^2$ 的“真主人”是抛物线 $y^2=2px+\lambda(p>0,\lambda>y_0^2-2px_0)$.

2.4　思考“伪中点弦”与“极线”的关系

不妨以椭圆为例.

设 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 外，则用“点差法”可求得“伪中点弦”为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}$，另外点 $P(x_0,y_0)$ 关于椭圆的“极线”（切点弦）为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$，由于两者结构很相似，所以猜想“伪中点弦”与“极线”有关系，研究后得到如下

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

结论:

设 $P(x_0,y_0)$ 关于椭圆的反演点为 Q,则“伪中点弦”$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}$ 即为 Q 关于椭圆的“极线”.

证明 因为 $Q(x_Q,y_Q)$ 关于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的“极线”为$\frac{x_Qx}{a^2}+\frac{y_Qy}{b^2}=1$,

又因为可求得 $P(x_0,y_0)$ 关于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的反演点 Q 的坐标为

$$Q\left(\frac{x_0}{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}},\frac{y_0}{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}}\right),$$

所以 Q 关于椭圆的“极线”为

$$\frac{x_0}{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}}\frac{x}{a^2}+\frac{y_0}{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}}\frac{y}{b^2}=1,$$

化简得$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}$,

所以,“伪中点弦”$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}$即为 Q 关于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的“极线”.

另外,对于双曲线、抛物线也有类似结论.

从视角最大到光时最短

——图说 Muller 问题、Schwarz 问题

安徽省肥东一中 231600 李剑峰

1 问题的起源

笔者在解答学生的疑惑中遇到如下问题:

问题 在 $\triangle ABC$ 中,边长 $a=2$,$A=60°$,求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

问题本身叙述简单明了,图形简洁明快,解决方案也朴实常规,$S=\frac{1}{2}bc\sin A$,要求面积的最大值,只需考虑 bc 的最大值即可.

思路 1 由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,

得 $bc=\frac{a^2}{\sin^2 A}\sin B\sin C$,

又 $\sin B\sin C=\sin B\sin(120°-B)$

$=\frac{1}{2}[\cos(2B-120°)-\cos 120°]$,

所以当 $B=60°$ 时取得最大值.

思路 2 由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

得 $b^2+c^2-bc=4$,

又 $b^2+c^2-bc\geqslant 2bc-bc$,所以 $bc\leqslant 4$,当且仅当 $b=c$ 时取得最大值.

在问题解决后,笔者感觉到该问题设问简洁美、思路流畅美、结果形式美,继而有思考之冲动,遂成此文.

2 问题的思考

思考 1 在 $\triangle ABC$ 中,边长 $a=2$,$A=60°$,求 $\triangle ABC$ 周长的最大值.

事实上,只需求 $b+c$ 的最大值,解决方案同上述两种思路,此处略.

思考 2 在 $\triangle ABC$ 中,边长 $a=2$,$A=60°$,求动点 A 的轨迹.

从图 1 不难得出如下结论: 在平面内动点 A 的轨迹是两段圆弧; 在空间中动点 A 的轨迹成“苹果”状. 该结论表明在过点 B,C 的同一圆弧上任意位置看 BC 的视角是相同的,利用该结论我们可以解决如下历史名题:

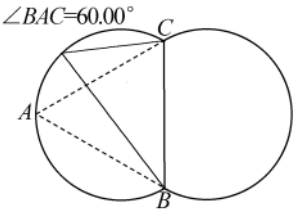

图 1

Muller 问题[2] 在地球表面的什么部位,一根垂直的悬杆呈现最长(即可视角最大)?该问题在人教版必修 5 不等式章节中以习题呈现,米勒问题

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net