

数 列

知识点：

1. 等差数列，等比数列
2. 一般数列求通项，求和
3. 数列综合问题

小题热身：

1. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = 2^n + 2n$ ，若该数列的第 k 项 a_k 满足 $40 < a_k < 70$ ，则 k 的值为（ ）
A. 3 B. 4 C. 5 D. 6
2. 意大利数学家斐波那契（约 1170 ~ 1250），以兔子繁殖为例，引入“兔子数列”：即 1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233... 在实际生活中，很多花朵（如梅花，飞燕草，万寿菊等）的瓣数恰是斐波那契数列中的数，斐波那契数列在现代物理及化学等领域也有着广泛的应用．已知斐波那契数列满足： $a_1 = a_2 = 1$ ， $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n (n \in N^*)$ ，若 $1 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_k = 9$ ，则 $k =$ （ ）
A. 2020 B. 2021 C. 59 D. 60
3. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_{n+1} = S_n + n - 1$ ，则下列结论正确的是（ ）
A. 若 $a_1 = 1$ ，则数列 $\{S_n + n\}$ 为等比数列 B. 若 $a_1 = 1$ ，则数列 $\{a_n + 1\}$ 为等比数列
C. 若 $a_1 = -1$ ，则数列 $\{S_n + n\}$ 为等差数列 D. 若 $a_1 = -1$ ，则数列 $\{a_n + 1\}$ 为等差数列
4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1 \geq 1$ ， $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$ ，下列说法正确的是（ ）
A. 存在 a_1 ，使得 $\{a_n\}$ 为常数数列 B. $a_{n+1} \geq a_n$ C. $a_{n+2} + a_n \leq 2a_{n+1}$ D. $a_{n+1} \leq a_n$

例题讲解：

例 1 在① $S_4 = 2(a_4 + 1)$ ； ② $a_{2n} = 2a_n + 1$ ； ③ $a_2^2 + a_6^2 = a_4^2 + a_5^2$ 中任选两个，补充在横线上，并回答下面问题.

已知公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ ，且_____.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+2}}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

例 2 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = \frac{n(n-1)}{2}$, 各项均为正数的等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n , _____,

且 $b_3 = 4$.

在① $T_2 = 3$ ② $T_3 = 7$ ③ $b_4 - b_3 = 2b_2$ 这三个条件中任选一个, 补充在上面的问题中.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和 A_n , 求证: $A_n < 2$.

例 3 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_2 = 3$, 且 $a_3^2 = 2a_7$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $a_1 > 0$, 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $2b_1 + 2^2b_2 + 2^3b_3 + \cdots + 2^n b_n = a_n, n \in N^*$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

数列

知识点：

4. 等差数列，等比数列
5. 一般数列求通项，求和
6. 数列综合问题

小题热身：

1. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = 2^n + 2n$ ，若该数列的第 k 项 a_k 满足 $40 < a_k < 70$ ，则 k 的值为 ()

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

2. 意大利数学家斐波那契 (约 1170 ~ 1250)，以兔子繁殖为例，引入“兔子数列”：即 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233... . 在实际生活中，很多花朵 (如梅花，飞燕草，万寿菊等) 的瓣数恰是斐波那契数列中的数，斐波那契数列在现代物理及化学等领域也有着广泛的应用. 已知斐波那契数列满足： $a_1 = a_2 = 1$ ， $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n (n \in \mathbb{N}^*)$ ，若 $1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + \cdots + a_{59} = a_k$ ，则 $k =$ ()

- A. 2020 B. 2021 C. 59 D. 60

解：依题意，

$$1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + \cdots + a_{59} = a_2 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + \cdots + a_{59}$$

$$= a_4 + a_5 + a_7 + a_9 + \cdots + a_{59} = a_6 + a_7 + a_9 + \cdots + a_{59} = \cdots = a_{58} + a_{59} = a_{60}，\text{则 } k = 60.$$

3. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_{n+1} = S_n + n - 1$ ，则下列结论正确的是 ()

- A. 若 $a_1 = 1$ ，则数列 $\{S_n + n\}$ 为等比数列 B. 若 $a_1 = 1$ ，则数列 $\{a_n + 1\}$ 为等比数列
C. 若 $a_1 = -1$ ，则数列 $\{S_n + n\}$ 为等差数列 D. 若 $a_1 = -1$ ，则数列 $\{a_n + 1\}$ 为等差数列

解：因为 $S_{n+1} = 2S_n + n - 1$ ，所以 $S_{n+1} + n + 1 = 2(S_n + n)$. 若 $a_1 = 1$ ，则 $S_1 + 1 = 2 \neq 0$ ，所以

$$\frac{S_{n+1} + n + 1}{S_n + n} = \frac{2S_n + 2n}{S_n + n} = 2. \text{ 故数列 } \{S_n + n\} \text{ 是等比数列，故 A 正确；所以 } S_n + n = 2^n，\text{ 则 } S_n = 2^n - n. \text{ 当}$$

$$n \geq 2 \text{ 时，} a_n = S_n - S_{n-1} = 2^{n-1} - 1，\text{ 由 } a_1 = 1，a_2 = 1，a_3 = 3 \text{ 可得 } a_1 + 1 = 2，a_2 + 1 = 2，a_3 + 1 = 4，$$

$$\text{即 } \frac{a_3 + 1}{a_2 + 1} \neq \frac{a_2 + 1}{a_1 + 1}，\text{ 故 B 错误；若 } a_1 = -1，\text{ 则由 } S_{n+1} + n + 1 = 2(S_n + n)，\text{ 得 } S_n + n = 0，\text{ 此时数列 } \{S_n + n\}$$

为等差数列，故 C 正确，此时可求得 $a_n = -1, a_n + 1 = 0$ ，此时数列 $\{a_n + 1\}$ 为等差数列；故 D 正确.

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1 \geq 1$ ， $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$ ，下列说法正确的是 ()

- A. 存在 a_1 ，使得 $\{a_n\}$ 为常数数列 B. $a_{n+1} \geq a_n$ C. $a_{n+2} + a_n \leq 2a_{n+1}$ D. $a_{n+1} \leq a_n$

【解析】 $a=1$ 时 $a_2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1}\right)=1$ ，同理 $a_3=a_4=\cdots=1$

1.此时 $\{a_n\}$ 常数列，A 对；

$$a_n \geq 1, \text{ 则 } a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right) \geq \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$\therefore a_n \geq 1$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) - a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n} - a_n\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-a_n^2}{a_n} \leq 0$$

$\therefore a_{n+1} \leq a_n$ ，B 正确；

$$a_1 = 2 \text{ 时, } a_2 = \frac{5}{4}, a_3 = \frac{41}{40}$$

$$a_1 + a_3 - 2a_2 = 2 + \frac{41}{40} - \frac{5}{2} = \frac{21}{40} > 0$$

$$\therefore a_1 + a_3 > 2a_2$$

$\therefore a_n + a_{n+2} \leq 2a_{n+1}$ 错误，C 错；

例题讲解：

例 1 在① $S_4 = 2(a_4 + 1)$ ② $a_{2n} = 2a_n + 1$ ③ $a_2^2 + a_6^2 = a_4^2 + a_5^2$ 中任选两个，补充在横线上，并回答下面问题。

已知公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ ，且_____。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+2}}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 。

【解析】方法一：选①②

$$(1) \text{ 设 } \{a_n\} \text{ 公差为 } d, \therefore \begin{cases} S_4 = 2(a_4 + 1) \\ a_{2n} = 2a_n + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a_1 + \frac{4(4-1)}{2}d = 2(a_1 + 3d + 1) \\ a_1 + (2n-1)d = 2[a_1 + (n-1)d] + 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{①} \\ \text{②} \end{matrix}$$

由①得 $a_1 = 1$ 代入②得 $d = 2$ ， $\therefore a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$

$$(2) b_n = \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+3)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3} \right)$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4(2n+1)} - \frac{1}{4(2n+3)}$$

方法二 (1) 选①②

因为 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $S_4 = 2(a_1 + 1)$, $a_{2n} = 2a_n + 1$,

$$\text{所以} \begin{cases} 4a_1 + \frac{4 \times 3}{2}d = 2(a_1 + 3d + 1) \\ 2a_2 = 2a_1 + 1 \end{cases}$$

解得 $a_1 = 1, d = 2$,

所以 $a_n = 2n - 1$.

选①③

因为 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $S_4 = 2(a_1 + 1)$, $a_2^2 + a_6^2 = a_4^2 + a_8^2$,

$$\text{所以} \begin{cases} 4a_1 + \frac{4 \times 3}{2}d = 2(a_1 + 3d + 1) \\ d(2a_1 + 9d) = 2d(2a_1 + 4d) \end{cases},$$

解得 $a_1 = 1, d = 2$,

所以 $a_n = 2n - 1$.

选②③

因为 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_{2n} = 2a_n + 1$, $a_2^2 + a_6^2 = a_4^2 + a_8^2$,

$$\text{所以} \begin{cases} a_2 = 2a_1 + 1 \\ d(2a_1 + 9d) = 2d(2a_1 + 4d) \end{cases}$$

解得 $a_1 = 1, d = 2$,

所以 $a_n = 2n - 1$.

(2) 因为 $a_n = 2n - 1$,

$$\text{所以 } b_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+3)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3} \right)$$

$$\text{所以 } S_n = \frac{1}{3} - \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)}$$

例2 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = \frac{n(n-1)}{2}$, 各项均为正数的等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n , _____,

且 $b_3 = 4$.

在① $T_2 = 3$ ② $T_3 = 7$ ③ $b_4 - b_3 = 2b_2$ 这三个条件中任选一个, 补充在上面的问题中.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ 的前 n 项和 A_n , 求证: $A_n < 2$.

解: $n=1$, $a_1 = S_1 = 0$,

$n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = n-1$, $n=1$ 时也成立, $\therefore a_n = n-1$

若选①, $T_3 = 3$, 设 $\{b_n\}$ 的公比为 q , $q > 0$

$$\therefore \begin{cases} b_1 + b_1 q = 3 \\ b_1 q^2 = 4 \end{cases} \therefore \begin{cases} b_1 = 1 \\ q = 2 \end{cases}, b_n = 2^{n-1}$$

若选②则 $T_2 = T_3 - b_3 = 3$, 下同①

若选③, 则 $4q - 4 = \frac{8}{q}$, 则 $q = 2$, 下同①

$$\therefore a_n = n-1, b_n = 2^{n-1}.$$

$$(2) \frac{a_n}{b_n} = \frac{n-1}{2^{n-1}} = (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore A_n = 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + (n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad ④$$

$$\frac{1}{2} A_n = 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + (n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad ⑤$$

④ - ⑤

$$\frac{1}{2} A_n = \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\frac{1}{2} A_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} - (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\frac{1}{2} A_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$A_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2 - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 2.$$

例 3 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_2 = 3$, 且 $a_3^2 = 2a_7$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $a_1 > 0$, 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $2b_1 + 2^2 b_2 + 2^3 b_3 + \cdots + 2^n b_n = a_n, n \in N^*$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

解: (1) $\because a_2 = 3, \therefore a_1 + d = 3 \quad ①, \because a_3^2 = 2a_7, \therefore (a_1 + 2d)^2 = 2(a_1 + 6d) \quad ②,$

由①②得: $\begin{cases} d=1 \\ a_1=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} d=3 \\ a_1=0 \end{cases}$, 当 $\begin{cases} d=1 \\ a_1=2 \end{cases}$ 时, $a_n = n+1$. 当 $\begin{cases} d=3 \\ a_1=0 \end{cases}$ 时, $a_n = 3(n-1)$.

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n+1$ 或 $a_n = 3(n-1)$.

(2) $\because a_1 > 0, \therefore a_n = n+1$,

$$2b_1 + 2^2 b_2 + 2^3 b_3 + \cdots + 2^n b_n = n+1 \quad ①, 2b_1 + 2^2 b_2 + 2^3 b_3 + \cdots + 2^{n-1} b_{n-1} = n(n \geq 2) \quad ②,$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得: } b_n = \frac{1}{2^n}, n \geq 2, n=1 \text{ 时, } b_1 = 1 \text{ 不满足上式, 所以 } b_n = \begin{cases} 1, n=1 \\ \frac{1}{2^n}, n \geq 2 \end{cases},$$

$$\text{所以 } n \geq 2 \text{ 时, } T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{\frac{1}{2^2}(1 - \frac{1}{2^{n-1}})}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n},$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } T_1 = 1 \text{ 满足上式, 所以 } T_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n}.$$