江苏省仪征中学 2020-2021 学年度第一学期
高三数学周练 10参考答案及评分建议

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1~4　D B C D　　　**5~8**　C B B C

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

9．A B　　**10**．A C　　**11**．A B D　　**12**．A C D

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分。

13．8　　**14**．$\frac{7}{16}$　　**15**．$(x-\frac{13}{6})^2+y^2=\frac{133}{36}$　　**16**．4π

8．【解析】设 2014 年到 2024 年每年的投入资金分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_6,b_1,b_2,\cdots b_5$．由已知，$a_1,a_2,\cdots,a_6$ 为等差数列，$a_1=160,a_6=260$，其和为 $S_1=1260$ 万元；$b_1,b_2,\cdots b_5$ 为等比数列，$b_1=260\times1.1$，公比为 $q=1.1$，其和为 $S_2=260\times\frac{1.1(1-1.1^5)}{1-1.1}=2860\times(1.1^5-1)$．

又 $1.1^5=(1+0.1)^5\approx1+C_5^1\times0.1+C_5^2\times0.1^2+C_5^3\times0.1^3=1.61$，所以 $S_2\approx1744.8$ 万元，所以投资总额大约为 3005 万元．选 C.

12.【解析】对于 A，函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π，所以 A 正确；

对于 B，令 $f(x)=0$，得 $2\sin x=\sqrt{3}+\sin 2x$，函数 $f(x)$ 的零点个数可转化为两函数 $y=2\sin x,y=\sqrt{3}+\sin 2x$ 图象交点个数，画图可知，图象在 $[-\pi,\pi]$ 上有只有 2 个交点，所以 B 错误；

对于 C，由 $f(2\pi-x)=\sqrt{3}+2\sin x-\sin 2x$，所以 $f(2\pi-x)+f(x)=2\sqrt{3}$，所以函数 $f(x)$ 的图象关于 $(\pi,\sqrt{3})$ 对称，C 正确；

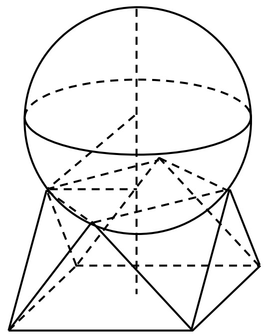
对于 D，由 $f'(x)=-2\cos x+2\cos 2x=2(\cos x-1)(2\cos x+1)$，取一个周期 $[-\pi,\pi]$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=-\frac{2\pi}{3},0,\frac{2\pi}{3}$，且当 $x\in\left[-\pi,-\frac{2\pi}{3}\right]$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right]$ 时，$f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $x=-\frac{2\pi}{3}$ 时取极大值.

由于 $f(-\frac{2\pi}{3})=\frac{5\sqrt{3}}{2}>f(\pi)=\sqrt{3}$，所以函数 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{5\sqrt{3}}{2}$，D 正确.

所以本题选 ACD.

16.【解析】四个小三角形的顶点所在平面截球面得小圆的的半径为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，小圆面到底座的距离为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．设球的半径为R，



由条件，得$R+\sqrt{R^2-\dfrac{1}{2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}+1$，解得$R=1$，

所以水晶球的表面积为$4\pi\ m^2$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。

17.（本小题满分 10 分）

【解】若选①，由$\sqrt{3}c\sin A=a\cos C$及正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，

得$\sqrt{3}\sin C\sin A=\sin A\cos C$，所以$\tan C=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．…… 3 分

因为$0<C<\pi$，所以$C=30°$．…… 5 分

又$B=105°$，所以$A=45°$，…… 6 分

结合$c=4$，可得$a=\dfrac{c\sin A}{\sin C}=4\sqrt{2}$．…… 8 分

所以△ABC中的面积$S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times 4\times 4\sqrt{2}\times\sin 105°$

$=8\sqrt{2}\times(\sin 45°\cos 60°+\cos 45°\sin 60°)=4\sqrt{3}+4$．…… 10 分

若选②，由$\tan(C+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\tan C+\tan\dfrac{\pi}{4}}{1-\tan C\tan\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{\tan C+1}{1-\tan C}=2+\sqrt{3}$，

可得$\tan C=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．下同① …… 3 分

若选③，由$a^2+b^2=c^2+\sqrt{3}ab$，得$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，…… 3 分

因为$0<C<\pi$，所以$C=30°$．下同① …… 5 分

18.（本小题满分 12 分）

【解】(1) $f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x+\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{3}{2}\cos x$

$=\sqrt{3}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.……………………………………………4 分

当 $x+\dfrac{\pi}{3}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即 $x=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$时，$f(x)$取得最大值$\sqrt{3}$.…………5 分

此时 x 的取值集合为$\{x|x=2k\pi+\dfrac{\pi}{6},\ k\in\mathbf{Z}\}$．…………6 分

(2) 由(1)知，$f(x)=\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，又 $f\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{5}$，

所以$\sqrt{3}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\cos\alpha=\frac{3\sqrt{3}}{5}$，即 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$.…………8 分

因为 $\alpha\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$，

$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=-\frac{7}{25}$，…………10 分

所以 $f(2\alpha)=\sqrt{3}\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\alpha+\frac{3}{2}\cos2\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{24}{25}-\frac{3}{2}\times\frac{7}{25}=\frac{24\sqrt{3}-21}{50}$.…………12 分

19．（本小题满分 12 分）

【解】（1）填表如下：

	肥胖	不肥胖	合计
经常运动员工	20	40	60
不经常运动员工	24	16	40
合计	44	56	100

…… 2 分

所以 $K^2=\frac{100(20\times16-24\times40)^2}{60\times40\times44\times56}=6.926$.　　…… 5 分

因为 $6.926>6.635$，所以有 99%的把握认为肥胖与不经常运动有关．…… 6 分

（2）“经常运动且不肥胖”的频率为 $\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$.　　…… 8 分

现随机抽取 3 人，“经常运动且不肥胖”的人数为 X 可能的取值为 0，1，2，3.

$P(X=0)=C_3^0(1-\frac{2}{5})^3(\frac{2}{5})^0=\frac{27}{125}$，$P(X=1)=C_3^1(1-\frac{2}{5})^2(\frac{2}{5})^1=\frac{54}{125}$，

$P(X=2)=C_3^2(1-\frac{2}{5})^1(\frac{2}{5})^2=\frac{36}{125}$，$P(X=3)=C_3^3(1-\frac{2}{5})^0(\frac{2}{5})^3=\frac{8}{125}$.　…… 10 分

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

所以 X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{27}{125}+1\times\frac{54}{125}+2\times\frac{36}{125}+3\times\frac{8}{125}=\frac{8}{125}=\frac{6}{5}$． … 12 分

20．（本小题满分 12 分）

【证】（1）因为 $\overrightarrow{DE}=\lambda\overrightarrow{AF}$，所以 $DE\,//\,AF$，

又因为 $DE\not\subset$ 平面 ABF， $AF\subset$ 平面 ABF，

所以 $DE\,//$ 平面 ABF． …… 2 分

因为底面 $ABCD$ 是正方形，所以 $CD\,//\,AB$，

又因为 $CD\not\subset$ 平面 ABF， $AB\subset$ 平面 ABF，

所以 $CD\,//$ 平面 ABF． …… 4 分

因为 $CD\subset$ 平面 CDE， $DE\subset$ 平面 CDE， $CD\cap DE=D$，

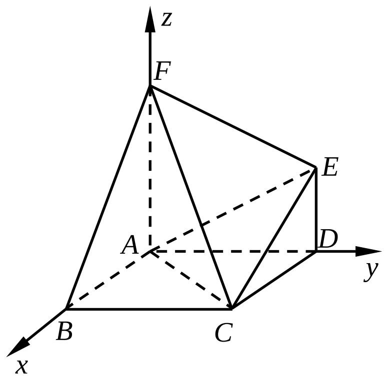
所以平面 $CDE\,//$ 平面 ABF．

因为 $CE\subset$ 平面 CDE，

所以 $CE\,//$ 平面 ABF． …… 6 分

【解】（2）以 A 为坐标原点，分别以 AB， AD， AF 所在直线为 x 轴、 y 轴、 z 轴，

建立如图空间直角坐标系.



由 $AB=AD=AF=2$ 得，

$A(0,0,0)$， $B(2,0,0)$， $C(2,2,0)$，

$F(0,0,2)$， $D(0,2,0)$， $E(0,2,2\lambda)$．

设平面 BCF 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，

由已知得， $\overrightarrow{FB}=(2,0,-2)$， $\overrightarrow{FC}=(2,2,-2)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{FB}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{FC}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2x_1-2z_1=0,\\ 2x_1+2y_1-2z_1=0.\end{cases}$

不妨取 $x_1=1$，则 $y_1=0$， $z_1=1$，

从而平面 BCF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(1,0,1)$． …… 8 分

设平面 ECF 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

又 $\overrightarrow{CE}=(-2,0,2\lambda)$，由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{FC}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{CE}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-2x_2+2\lambda z_2=0,\\ 2x_2+2y_2-2z_2=0.\end{cases}$

不妨取 $z_2=1$，则 $x_2=\lambda$， $y_2=1-\lambda$，

所以平面 ECF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(\lambda,1-\lambda,1)$． …… 10 分

所以 $\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>=\frac{\lambda+1}{2\sqrt{\lambda^2-\lambda+1}}$．

因为二面角 $B-EC-F$ 的大小为 $\frac{5\pi}{6}$，

所以 $\frac{\lambda+1}{2\sqrt{\lambda^2-\lambda+1}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，化简得 $2\lambda^2-5\lambda+2=0$，

解得 $\lambda=\frac{1}{2}$ 或 $\lambda=2$（舍去）． …… 12 分

21．（本小题满分 12 分）

【解】（1）由题知 M，N 关于原点对称，则可设 $D(x_1, y_1)$，$M(x_2, y_2)$，$N(-x_2, -y_2)$．

因为点 D，M 在椭圆 C 上，所以 $\frac{x_1^2}{4}+y_1^2=1$，$\frac{x_2^2}{4}+y_2^2=1$，

所以 $y_1^2=1-\frac{x_1^2}{4}$，$y_2^2=1-\frac{x_2^2}{4}$，

所以 $k_1k_2=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{y_1^2-y_2^2}{x_1^2-x_2^2}=\frac{(1-\frac{x_1^2}{4})-(1-\frac{x_2^2}{4})}{x_1^2-x_2^2}=-\frac{1}{4}$． …… 2 分

（2）设直线 $DM: y=k_1(x-1)$，代入 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 可得，

$(1+4k_1^2)x^2-8k_1^2x+4k_1^2-4=0$，所以 $x_1+x_2=\frac{8k_1^2}{1+4k_1^2}$，

因此 $DN=\sqrt{1+k_2^2}\left|x_1-(-x_2)\right|=\sqrt{1+k_2^2}\left|x_1+x_2\right|=\frac{8k_1^2\sqrt{1+k_2^2}}{1+4k_1^2}$， …… 4 分

因为 $k_1k_2=-\frac{1}{4}$，所以 $DN=\frac{2\sqrt{1+k_2^2}}{1+4k_2^2}$．

设 $t=\sqrt{1+k_2^2}\in(1, +\infty)$，则 $\frac{1}{|DN|}+\frac{19}{2\sqrt{1+k_2^2}}=\frac{4t^2+16}{2t}=2t+\frac{8}{t}\geqslant 8$，

等号当仅当 $t=2$ 时取，即 $k_2=\pm\sqrt{3}$ 时取等号.

所以 $\frac{1}{|DN|}+\frac{19}{2\sqrt{1+k_2^2}}$ 的最小值为 8. …… 7 分

（3）不妨设 $k_1>0$，$k_2<0$，由 $k_1k_2=-\frac{1}{4}$，$k_1+k_2=0$，

所以 $k_1=\frac{1}{2}$，$k_2=-\frac{1}{2}$． 8 分

将直线 DM 的方程为 $y-y_1=\frac{1}{2}(x-x_1)$ 代入 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 可得，

$x^2+4\left[\frac{1}{2}(x-x_1)+y_1\right]^2=4$，即 $2x^2+2(2y_1-x_1)x+x_1^2+4y_1^2-4x_1y_1-4=0$．

因为 $x_1^2+4y_1^2=4$，所以方程可化为 $x^2+(2y_1-x_1)x-2x_1y_1=0$．

所以 $x_1x_2=-2x_1y_1$，即 $x_2=-2y_1$，所以 $y_2=-\frac{1}{2}x_1$，即 $M(-2y_1,-\frac{1}{2}x_1)$．10 分

所以 $|OD|^2+|OM|^2=(x_1^2+y_1^2)+\left[(-2y_1)^2+(-\frac{1}{2}x_1)^2\right]=\frac{5}{4}x_1^2+5y_1^2=5$．… 12 分

22．（本小题满分 12 分）

【解】（1）当 $a=1$ 时，设 $h(x)=x-\ln(x+1)$，所以 $h'(x)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}$，

令 $h'(x)=0$，得 $x=0$．

当 $x>0$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；

当 $-1<x<0$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

所以 $h(x)\geqslant h(0)=0$，即 $f(x)\leqslant x$．…… 2 分

又 $g(x)-x=x(e^x-1)$，因为 e^x-1 与 x 同号（当 $x=0$ 时，$e^x-1=x=0$）

所以 $g(x)-x\geqslant 0$，即 $x\leqslant g(x)$．

综上可知，$f(x)\leqslant x\leqslant g(x)$．…… 4 分

（2）$F(x)=a\ln(x+1)-xe^x$（$x>-1$），所以 $F'(x)=\frac{a}{x+1}-(x+1)e^x$．

当 $a\leqslant 0$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $F(x)$ 无极值．5 分

当 $a>0$ 时，记 $F'(x)=\varphi(x)$，所以 $\varphi'(x)=-\frac{a}{(x+1)^2}-(x+2)e^x<0$，

所以 $\varphi(x)$ 即 $F'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递减．

又 $F'(0)=a-1$，$F'(a-1)=1-ae^{a-1}$．…… 7 分

①当 $0<a<1$ 时，$F'(0)<0$，$F'(a-1)>0$，

所以在 $(-1,+\infty)$ 上存在唯一的 $\alpha\in(a-1,0)$，使得 $F'(\alpha)=0$．

当 $-1<x<\alpha$，$F'(x)>0$，所以 $F(x)$ 单调递增；

当 $x>\alpha$，$F'(x)<0$，所以 $F(x)$ 单调递减，

所以 $F(x)$ 的极大值为 $F(\alpha)>F(0)=0$，符合题意．…… 10 分

②当 $a>1$ 时，$F'(0)>0$，$F'(a-1)<0$，同理符合题意．

③当 $a=1$ 时，由（1）知 $F(x)\leqslant 0$，不合题意．

综上，实数 a 的取值范围是 $a>0$ 且 $a\neq 1$．…… 12 分