江苏省仪征中学2020-2021学年度第一学期

高二数学热身综合练（2）

班级：__________ 姓名：_______________ 学号：_________

一、选择题（本大题共4小题，共20分）

1. 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右焦点分别为$F_1,F_2$，点$P$在椭圆上，$PF_2\perp x$轴，且$\triangle PF_1F_2$是等腰直角三角形，则该椭圆的离心率为( )

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$　　C. $2-\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{2}-1$

2. 已知函数$f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$，$\{a_n\}$为等比数列，且$a_n>0$，$a_{1009}\cdot a_{1011}=1$，则$f(\ln a_1)+f(\ln a_2)+\cdots+f(\ln a_{2019})=($ $)$

A. 2018　　B. $\frac{2019}{2}$　　C. 1009　　D. 1

3. 下列说法正确的是( )

A. 命题“$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2>-1$”的否定是“$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2<-1$”

B. 命题“$\exists x\in(-3,+\infty)$，$x^2\le 9$”的否定是“$\forall x\in(-3,+\infty)$，$x^2>9$”

C. “$x^2>y^2$”是“$x>y$”的必要不充分条件

D. “$m<0$”是“关于x的方程$x^2-2x+m=0$有一正一负根”的充要条件

4. 已知抛物线C：$y^2=2px\ \ (p>0)$的焦点F到准线的距离为2，过点F的直线与抛物线交于P，Q两点，M为线段PQ的中点，O为坐标原点，则( )

A. C的准线方程为$y=1$　　B. 线段PQ长度的最小值为4

C. M的坐标可能为$(3,2)$　　D. $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-3$

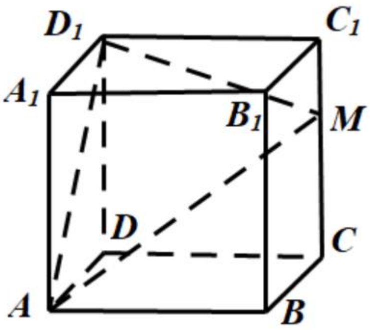
二、填空题（本大题共4小题，共20分）

5. 在正四面体$P-ABC$中，棱长为2，且E是棱AB中点，则$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{BC}$的值为______.

6. 已知$F(2,0)$为椭圆C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点，直线$l$: $y=-\frac{1}{3}x+m$与椭圆C相交于A,B两点，A,B的中点为P，且直线OP的斜率$k=1$，则椭圆C的方程为_____.

7. 已知F为抛物线$y^2=x$的焦点，点A,B在该抛物线上且位于x轴的两侧，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$(其中$O$为坐标原点)，则$\triangle ABO$与$\triangle AFO$面积之和的最小值是________.

8. 如图所示，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=1$，$BC=\sqrt{3}$，点 M 在棱CC_1上，且$MD_1\perp MA$，则ΔMAD_1的面积的最小值为______，此时棱CC_1与平面MAD_1所成角的正弦值为__________.

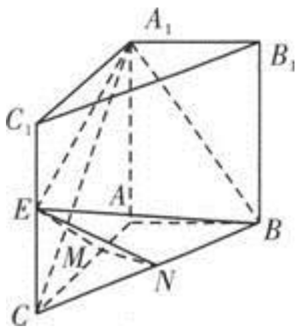


三、解答题（本大题共 3 小题，共 36 分）

9. 如图，直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的底面边长和侧棱长均为 2，E 为棱CC_1的中点.

(1)求异面直线A_1C与 BE 所成角的余弦值；

(2)已知 M，N 分别在棱 AC，BC 上，且$MN//AB$，$CM=\lambda AC$，若平面A_1BE与平面 MNE 所成的锐二面角为$60°$，求 A 的值.



10. 已知等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，$a_1=1$，公比$q=3$.

(1)求证：$S_n=\frac{a_{n+1}-1}{2}$;

(2)求数列$\{2na_n\}$的前 n 项和T_n.

11. 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$)的一个顶点为$M(0,\sqrt{3})$，离心率$e=\frac{1}{2}$.

(1)求椭圆的方程；

(2)设直线 l 过右焦点F_2与椭圆交于A,B两点，求ΔAOB面积的最大值.

答案和解析

1. D　　2. B　　3. BD　　4. BCD

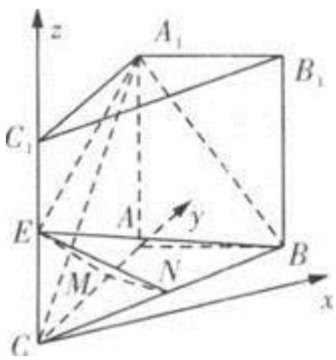
5. -1

6. $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$

7. 3

8. $\frac{3}{2}$；$\frac{\sqrt{3}}{3}$

9. 解：(1)在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$CC_1\perp$平面ABC，又$AC\subset$平面ABC，所以$AC\perp CC_1$，以C为坐标原点，CA，CC_1所在直线分别为y轴，z轴，过点C且垂直于平面ACC_1A_1的直线为x轴建立如图所示的空间直角坐标系．



则$C(0,0,0)$，$A(0,2,0)$，$B(\sqrt{3},1,0)$，$A_1(0,2,2)$，$E(0,0,1)$，

所以$\overrightarrow{A_1C}=(0,-2,-2)$，$\overrightarrow{BE}=(-\sqrt{3},-1,1)$，

设异面直线A_1C与BE所成的角为θ，则$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{BE}|}{|\overrightarrow{A_1C}||\overrightarrow{BE}|}=0$，

所以异面直线A_1C与BE所成角的余弦值为0．

(2)由(1)及题意知，$M(0,2\lambda,0)$，$\overrightarrow{A_1E}=(0,-2,-1)$，$\overrightarrow{A_1B}=(\sqrt{3},-1,-2)$，$\overrightarrow{ME}=(0,-2\lambda,1)$，$\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3}\lambda,-\lambda,0)$，

设平面A_1BE的法向量为$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{A_1E}\cdot\overrightarrow{n_1}=0,\\ \overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{n_1}=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}2y_1+z_1=0,\\ \sqrt{3}x_1-y_1-2z_1=0,\end{cases}$

取$z_1=2$，则$y_1=-1$，$x_1=\sqrt{3}$，所以$\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{3},-1,2)$为平面$A_1BE$的一个法向量.

设平面 MNE 的法向量为$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{n_2}=0,\\ \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{n_2}=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}-2\lambda y_2+z_2=0,\\ \sqrt{3}\lambda x_2-\lambda y_2=0,\end{cases}$令$y_2=\sqrt{3}$，则$x_2=1$，$z_2=2\sqrt{3}\lambda$，所以$\overrightarrow{n_2}=(1,\sqrt{3},2\sqrt{3}\lambda)$为平面 MNE 的一个法向量.

设平面A_1BE与平面 MNE 所成的锐二面角为θ，

则$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{|4\sqrt{3}\lambda|}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{4+12\lambda^2}}=\frac{1}{2}$，解得$\lambda=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，

又$0\leq\lambda\leq 1$，所以$\lambda=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

10. 解：(1) ∵在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$q=3$，

$\therefore a_{n+1}=a_1q^n=3^n$.

又$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{1-3^n}{1-3}=\frac{3^n-1}{2}$,

$\therefore S_n=\frac{a_{n+1}-1}{2}$.

(2)由(1)知数列$\{2na_n\}$的通项公式为$2na_n=2n\times 3^{n-1}$，

$\therefore T_n=2(1\times 3^0+2\times 3^1+3\times 3^2+\cdots+n\times 3^{n-1})$，①

$3T_n=2[1\times 3^1+2\times 3^2+\cdots+(n-1)\times 3^{n-1}]+2n\times 3^n$，②

①−②得$-2T_n=2(3^0+3^1+3^2+\cdots+3^{n-1})-2n\times 3^n=2\times\frac{1-3^n}{1-3}-2n\times 3^n=3^n-$

$2n \times 3^n - 1 = (1-2n) \times 3^n - 1$，

$\therefore T_n = \frac{1}{2}[(2n-1) \times 3^n + 1] = (n - \frac{1}{2}) \times 3^n + \frac{1}{2}$.

11. 解：(1)由题意可得$\begin{cases} b = \sqrt{3} \\ \frac{e}{a} = \frac{1}{2} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Rightarrow a = 2, c = 1$，

则椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(Ⅱ)当$l: x = 1$，则$S = \frac{1}{2}|AB| \cdot |OF_2| = \frac{1}{2} \times 3 \times 1 = \frac{3}{2}$,

当直线存在斜率，设$l: y = k(x-1), k \neq 0, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)\begin{cases} y = k(x-1) \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases} \Rightarrow$

$(4k^2+3)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0 x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{4k^2+3}, x_1x_2 = \frac{4k^2-12}{4k^2+3}$ $S = \frac{1}{2}|OF_2| \cdot$

$|y_2 - y_1| = \frac{1}{2}|y_2 - y_1| = \frac{1}{2}|k(x_2 - x_1)|$

$$S = \frac{1}{2}|k|\sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2}$$
$$= 6\sqrt{\frac{k^4+k^2}{(4k^2+3)^2}}$$

$$S = \frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{2}{4k^2+3} - \frac{3}{(4k^2+3)^2}},$$

记$t = \frac{1}{4k^2+3}, t \in (0, \frac{1}{3})$，则$u(t) = -3t^2 - 2t + 1, t \in (0, \frac{1}{3})$则$0 < u(t) < 1$，

$0 < S < \frac{3}{2}$

所以，当$l: x = 1$时，$S = \frac{3}{2}$为最大值.