

问题提出教学在高中数学习题课中的实践研究

浙江省安吉县孝丰高级中学 (313300) 王 森

一、问题提出

美国数学家哈尔摩斯说过:“问题是数学的心脏。”《普通高中数学课程标准》(2017年)也将“提高从数学角度发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力”作为总的课程目标.因此,唯有源源不断地提出有意义的问题才能保持数学经久不衰的生命力.

数学课堂通常分为“概念课”、“习题课”、“复习课”等课型.习题课是高中数学教学中非常重要的课型,也是一线教师非常重视的教学环节.很多教师甚至认为习题课重于一切,把概念定理课都上成了习题课.然而,目前习题课普遍存在的一个问题是课堂上反复刷题,提高了学生解题的熟练度,但缺少提升学生思维能力的举措.因此,在平时的数学习题课上,培养学生问题提出的习惯以及提升学生问题提出的能力就显得极为重要.

然而一些教师对于问题提出还存在困扰,例如什么是问题提出?什么是问题提出教学?问题提出和提出问题有何本质区别?刘灿文曾指出:数学问题的提出有两个主体,即教师与学生.教师以“问题”为载体,去激发学生积极思考、主动钻研,教师举一反三,学生反三,或提出自己的疑问,或创造新的关联问题.在举一反三的过程中,学生的积极性被激发,思维能力得到提升.哪怕学生在此过程中摔得很疼,但只要学生是主动思考、积极探索的,从学生长远发展来看,这个过程依然很有意义^[1].

那么,如何培养学生提出问题的习惯,如何提升学生提出问题的能力?张辉荣等曾提出:问题提出教学知识是教师关于问题提出教学所必须知道的知识,同样涉及到“教什么”、“教谁”、“怎么教”三个方面的内容^[2].笔者根据自己习题课课堂经验从问题提出的学生认知、问题提出的情境创设、问题提出的教学方法、问题提出的教学评价四个方面来谈谈问题提出教学在高中数学习题课中的实践研究.

二、问题提出教学的案例分析

1. 问题提出的学生认知

问题提出的学生认知指向的是教师关于“教谁”的知识.教学是共舞的艺术,教师和学生都是问题提出教学活动最直接的参与者.有效教学要基于学生的思维,因此,教师进行问题提出教学活动需

事先了解学生的“数学现实”,学生会不会提出问题,学生会提出什么样的问题,所提出的问题是否有数学价值等.教师对学生问题提出知识的了解是教师问题提出教学活动开展的基本要求,能够帮助教师在问题提出教学活动中,根据学生学习特点,设置符合学生认知发展的问题情境,预测学生所能提出的问题.

案例1 “点差法”习题课

问题1 (1)过椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 内一点 $M(2,1)$

引一条弦,使弦被点 M 平分,求这条弦所在直线的方程;

(2)已知双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$,经过点 $M(1,1)$ 能否作一条直线 l ,使 l 与双曲线交于 A, B ,且点 M 是线段 AB 的中点.若存在这样的直线 l ,求出它的方程;若不存在,说明理由.

点评:学生在学习圆锥曲线后解决圆锥曲线的问题时,他们的认识:设而不求,韦达定理.教师在设置点差法这节习题课时,给出如上两个引例,就要预设到学生的认识,可能提出设而不求解题方法.因此,教师需要了解学生的现有学习水平、思维特点,在了解的基础上进行问题提出教学,即要将教学的重点由教师的“教”转向学生的学,学生对问题的认知是教师进行问题提出教学做到心中有数

2. 问题提出的情境创设

在课堂教学中,要引导学生提出高质量的数学问题,离不开教师对数学情境的精心创设.为此,教师必须具有丰富的问题提出情境知识,才能创设一个以问题驱动的课堂教学环境,让学生感受到提出问题的必要性,并通过问题提出活动,增长数学知识,发展数学思维.

案例2 “基本不等式”习题课

问题2 甲、乙、丙、丁四位同学分别给出了他们的各自的解法,哪位同学的解法正确?为什么?

甲:因为 $x^2 + \frac{a^2}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{a^2}{x^2}} = 2a$ ①, $(1-x^2) + \frac{b^2}{1-x^2} \geq 2\sqrt{(1-x^2) \cdot \frac{b^2}{(1-x^2)}} = 2b$ ②,由①+②得 $x^2 + \frac{a^2}{x^2} + (1-x^2) + \frac{b^2}{1-x^2} \geq 2a + ab$,所以 $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{1-x^2} \geq$

$2a+2b-1$, 即 $f(x) = \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{1-x^2} (a>b>0)$ 的最小值为 $2a+2b-1$.

乙: 因为 $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{1-x^2} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{x^2} \cdot \frac{b^2}{1-x^2}}$, 当且仅当 $\frac{a^2}{x^2} = \frac{b^2}{1-x^2}$ 时等号成立, 解得 $x^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2}$. 代入上式得 $2\sqrt{\frac{a^2}{x^2} \cdot \frac{b^2}{1-x^2}} = 2(a^2+b^2)$, 即 $f(x) = \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{1-x^2} (a>b>0)$ 的最小值为 $2(a^2+b^2)$.

丙: 因为 $x^2 + (1-x^2) = 1$, 所以 $[x^2 + (1-x^2)] \cdot (\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{1-x^2}) \geq 2\sqrt{x^2(1-x^2)} \cdot 2\sqrt{\frac{a^2}{x^2} \cdot \frac{b^2}{1-x^2}} = 4ab$, 即 $f(x) = \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{1-x^2} (a>b>0)$ 的最小值为 $4ab$.

丁: 因为 $x^2 + (1-x^2) = 1$, 所以 $[x^2 + (1-x^2)] \cdot (\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{1-x^2}) = a^2 + b^2 + \frac{a^2(1-x^2)}{x^2} + \frac{b^2x^2}{1-x^2} \geq a^2 + b^2 + 2\sqrt{\frac{a^2(1-x^2)}{x^2} \cdot \frac{b^2x^2}{1-x^2}} = a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$, 即 $f(x) = \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{1-x^2} (a>b>0)$ 的最小值为 $(a+b)^2$.

究竟哪位同学解法正确? 错的同学, 错在哪? 这四位同学的解法引发了学生的认知冲突. 教师引导学生比较、思考、讨论, 在此基础上, 同学们还能想到什么问题?^[3]

生1 提出问题3 利用基本不等式求最值有什么条件? 以上四种解法符合定理的使用条件吗? 如果不符合, 你能通过转化求解吗?

生2 提出问题4 我们在使用基本不等式应该注意些什么条件?

生3 提出问题5 求函数 $f(x) = \sin^2 x + \frac{4}{\sin^2 x} (x \in (0, \frac{\pi}{2}])$ 的最小值?

点评: 在学习基本不等式习题课时, 教师并没有起始就给出基本不等式的三个条件: 一正、二定、三相等, 而是根据学生学习目标和学习内容的特定需要, 把基本不等式中的数学关系由已知变化为需要思考和探索的未知关系, 并置于学生相关的现实背景中. 这样学生更容易理解基本不等式, 并学会利用基本不等式解决实际问题. 因此, 在教学中, 教师可选取多种情境表征方式, 多样化的表征方式可吸引学生积极主动提出问题, 让问题提出教学以更加丰富生动的形式展开, 让课堂焕发新的活力.

3. 问题提出的教学方法

在问题提出的教与学中, 学生是否能提出问题, 离不开教师的教学组织和教学引导. 因此, 教师在问题提出教学中方法的运用尤为重要. 教师的问题提出教学方法知识包含两层含义: 一是关于教学组织的知识, 涉及课堂组织模式; 二是关于教学引导的知识, 包括教师促进课堂交流和指导学生提出问题的知识, 有效促进学生提出问题, 尤其是教师要注意给学生一个思考的方向, 使学生形成提出数学问题的一个模式.

祝玉兰等曾提出有关问题提出的教学方法的6大策略: 因果策略、比较策略、扩大策略、极限策略、变化策略以及逆反策略^[4]. 笔者从扩大策略、变化策略分析下习题课中问题提出的教学方法研究.

3.1 扩大策略

特殊情况或现象中总结出的规律, 推广到更大范围或一般情况还能成立吗? 这个规律是具有普遍性还是只适合于某些特殊情况? 怎样改动才可以应用到另外的情况?

案例3 “圆锥曲线”习题课

问题6 已知椭圆方程 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 点 A, B 分别为椭圆的左右顶点, 若点 P 为椭圆上不同于 A, B 的任意一点, 且直线 PA 的斜率2, 则直线 PB 的斜率为_____.

生4: 令 $P(x, y)$, 则 $k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{y}{x+2} \cdot \frac{y}{x-2} = \frac{y^2}{x^2-4} = \frac{1-\frac{x^2}{4}}{x^2-4} = -\frac{1}{4}$, 所以 $k_{PB} = -\frac{1}{8}$.

师: 生4解答的非常不错, 本题点 A, B 分别为椭圆的左右顶点, 如果点 A, B 位置发生变化, 会怎么样呢?

生5 提出问题7 已知椭圆方程 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 点 A, B 关于椭圆的中心对称, 若点 P 为椭圆上不同于 A, B 的任意一点, 且直线 PA 的斜率2, 则直线 PB 的斜率为_____.

同学讨论, 最后得到 $k_{PA} \cdot k_{PB} = -\frac{1}{4}$.

师: 我们发现点 A, B 只要关于椭圆的中心对称, 则结论不发生变化, 那么在此基础上, 同学们还能提出什么问题吗?

生6 提出问题8 已知椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>b>0)$, 点 A, B 关于椭圆的中心对称, 若点 P 为椭圆上不同于 A, B 的任意一点, 则直线 PA, PB 的斜率之积为_____.

同学讨论, 最后得到 $k_{PA} \cdot k_{PB} = e^2 - 1 (e \text{ 为椭圆})$

的离心率).

师:非常好,同学们还能提出什么问题吗?

生7 提出问题9 已知双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

($a > 0, b > 0$), 点 A, B 关于双曲线的中心对称, 若点 P 为双曲线上不同于 A, B 的任意一点, 则直线 PA, PB 的斜率之积为_____.

同学猜想, 并证明得到: $k_{PA} \cdot k_{PB} = e^2 - 1$ (e 为双曲线的离心率).

点评:通过圆锥曲线这节习题课的研究, 让同学们经历由特殊到一般, 由旧的知识规律, 通过问题的提出, 逐渐发现更一般的规律, 从而达到思维的发散, 能力的提升.

3.2 变化策略

还有没有其它的结论? 如果条件改变, 结果会怎样?

案例4 “椭圆中参数取值范围一般解法”习题课

问题10 已知点 $P(0, 1)$, 椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = m$ ($m > 1$) 上两点 A, B 满足 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{BP}$, 则当 $m =$ _____ 时, 点 B 横坐标的绝对值最大.

生8 解法:(韦达定理)(1)当直线 AB 的斜率不存在时, 则直线 AB 的方程为 $x = 0$, 带入椭圆解得 $y = \pm\sqrt{m}$, 所以 $A(0, -\sqrt{m}), B(0, \sqrt{m})$, 由 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{BP}$ 得 $1 + \sqrt{m} = 2(1 - \sqrt{m})$, 解得 $m = 9$.

(2)当直线 AB 的斜率存在时, 设直线 AB 的方程为 $y = kx + 1$ ($k \neq 0$), $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 联立方程组 $\begin{cases} y = kx + 1, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = m \end{cases}$ 得 $(1 + 4k^2)x^2 + 8kx + 4 - 4m = 0$,

由韦达定理知 $x_1 + x_2 = \frac{-8k}{1 + 4k^2}, x_1 x_2 = \frac{4 - 4m}{1 + 4k^2}$. 由 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{BP}$ 得 $x_1 = -2x_2$ 带入韦达定理得 $x_1 = \frac{-16k}{1 + 4k^2}, x_2 = \frac{8k}{1 + 4k^2}$. 所以 $|x_2| = |\frac{8k}{1 + 4k^2}| = |\frac{8}{\frac{1}{k} + 4k}| \leq 2$, 等号

成立当且仅当 $k = \pm \frac{1}{2}$. 由 $x_1 x_2 = \frac{4 - 4m}{1 + 4k^2} = \frac{-16k}{1 + 4k^2} \cdot \frac{8k}{1 + 4k^2}$ 得 $m = \frac{1 + 36k^2}{1 + 4k^2} = 5$.

生9 解法:(设点法) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{BP}$ 得 $x_1 = -2x_2, y_1 = 3 - 2y_2$. 因为 A, B 在椭圆上, 所以 $\begin{cases} \frac{x_1^2}{4} + y_1^2 = m, \\ \frac{x_2^2}{4} + y_2^2 = m, \end{cases}$ 则 $y_2 = \frac{m + 3}{4}$. 所以 $x_2^2 =$

$\frac{4(m - \frac{(m + 3)^2}{4})}{1} = \frac{4m - (m + 3)^2}{1} = -m^2 - 6m - 9$.

因为 $x_2^2 \geq 0$, 所以 $-m^2 - 6m - 9 \geq 0$, 解得 $m = 5$.

生10 解法:(点差法) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{BP}$ 得 $x_1 = -2x_2, y_1 = 3 - 2y_2$. 由 $\frac{x_1^2}{4} + y_1^2 = m, \frac{x_2^2}{4} + y_2^2 = m$, 两式相减得 $\frac{(x_1 - 2x_2)(x_1 + 2x_2)}{4} + (y_1 + 2y_2)(y_1 - 2y_2) = -3m$, 得到 $\begin{cases} y_1 - 2y_2 = -m, \\ y_1 + 2y_2 = 3, \end{cases}$ 带入方程 $\frac{x_1^2}{4} + y_1^2 = m$, 得 $\frac{x_1^2}{4} = -\frac{1}{4}m^2 + \frac{5}{2}m - \frac{9}{4}$, 当 $m = 5$ 时, $|x_2|_{\max} = 2$.

$-\frac{1}{4}(m - 5)^2 + 4$, 当 $m = 5$ 时, $|x_2|_{\max} = 2$.

生10 解法:(点差法) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{BP}$ 得 $x_1 = -2x_2, y_1 = 3 - 2y_2$.

$\begin{cases} \frac{x_1^2}{4} + y_1^2 = m, \\ \frac{x_2^2}{4} + y_2^2 = m, \end{cases}$ 有 $\begin{cases} \frac{x_1^2}{4} + y_1^2 = m, \\ \frac{4x_2^2}{4} + 4y_2^2 = 4m, \end{cases}$ 两式相减得

$\frac{(x_1 - 2x_2)(x_1 + 2x_2)}{4} + (y_1 + 2y_2)(y_1 - 2y_2) = -3m$, 得到 $\begin{cases} y_1 - 2y_2 = -m, \\ y_1 + 2y_2 = 3, \end{cases}$ 带入方程 $\frac{x_1^2}{4} + y_1^2 = m$, 得

$\frac{x_1^2}{4} = -\frac{1}{4}m^2 + \frac{5}{2}m - \frac{9}{4}$, 当 $m = 5$ 时, $|x_2|_{\max} = 2$.

师:以坐标为切入点, 向量问题转化为坐标问题, 利用消元法, 得到关于参数 m 的二次函数最值问题, 是解决本题的切入点, 上述方法是通行通法吗? 若改变条件, 三种解法还适用吗? 你能提出相关的问题吗?

生11 提出问题11 已知点 $P(0, 1)$, 椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = m$ ($m > 1$) 上两点 A, B 满足点 P 为 A, B 的中点, 则直线 AB 的方程_____.

生12 提出问题12 已知点 $P(0, 1)$, 椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = m$ ($m > 1$) 上两点 A, B 满足 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{BP}$, 则实数 λ 的取值范围_____.

生13 提出问题13 已知点 $P(0, 1)$, 椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = m$ ($m > 1$) 上两点 A, B 满足 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{BP}$, 且 $\angle APO = 45^\circ$, 则实数 m 的取值范围_____.

生14 提出问题14 已知点 $P(0, 1)$, 椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = m$ ($m > 1$) 上两点 A, B 关于直线 $y = x - 3$ 对称, 则实数 m 的取值范围_____.

点评:解析几何中参数的取值范围, 是历年高考的热点. 这类问题一般难度较大, 原因是一方面这部分内容包含的容量大, 涉及的知识面广, 综合性强, 灵活度高; 另一方面, 解决这类题目的方法多种多样, 技巧灵活多变. 只要挖掘题目内含的本质关系, 合理运用题目中相关量之间的关系. 克服恐惧情绪, 排除心理障碍, 深刻揭示出这类题的本质, 理清思路, 依据提设条件, 合理建立关于参数的函数关系或不等关系(不等式或不等式组), 化多参数问题为单参数问题, 就可确定参数的取值范围.

4. 问题提出的教学评价

问题提出教学评价是改进教学、提供及时反馈

的有效手段. 问题提出教学评价首先包括对学生提出问题能力评估的知识. 问题提出教学不止步于学生提出问题, 而是意在促进学生的数学学习, 因此在学生提出问题后, 教师需进行及时反馈评价, 让学生知道自己提出的问题怎样, 为学生下一次问题提出积累有效经验.

案例5 基本不等式习题课

问题 15 求 $f(x) = x + \frac{4}{x}$ ($0 < x \leq 1$) 的最小值.

生 15: 由基本不等式得 $x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4$,

所以最小值为 4.

师: 基本不等号成立的条件是什么?

生 15: 三相等.

师: 具体点.

生 15: 就是 $x = \frac{4}{x}$.

师: 此时 x 等于多少?

生 15: $x = 2$, 哦我知道错了.

师: 同学们想想, 此时基本不等式还成立吗? 怎么处理呢?

生 16: 采用对勾函数解决.

师: 非常好! 同学们还能提出相应的问题吗?

.....

点评: 该案例中教师不仅是简单地对学生提出问题的价值性进行肯定, 还对其提出的问题类型进行了归纳总结. 教师对学生提出的问题进行本质内容的评价反馈, 加深学生对问题提出的理解, 引发学生对问题的思考, 激活学生思维.

三、问题提出教学的反思

1. 问题提出教学能够促进学生对数学的理解

数学理解是对数学知识的本质、结构及与其相关知识间联系的一种深刻把握, 是学生数学核心素养中的重要内容. 问题是通往数学理解的重要途径, 以问题推动课堂教学, 引领学生展开思维, 能有效促进学生对数学的理解.

2. 问题提出教学能够改进学生解决数学的能力

问题教学课堂上, 教师以“问题”为载体, 去激发学生积极思考、主动钻研, 教师举一, 学生反三, 或提出自己的疑问, 或创造新的关联问题. 在举一反三的过程中, 学生的积极性被激发, 思维能力得到提升.

3. 问题提出教学能够改进学生学习数学的态度

问题提出教学过程中, 由于问题提出具有开放性、不确定性、自主性、多样性等特点, 改变原来习题课的刷题, 增加熟悉度的特点, 让每一位学生通过问题的自主性、多样性的积极参与到课堂中去, 去感受数学, 去理解数学, 去热爱数学.

参考文献

- [1] 林崇德. 问题提出在高中数学习题课中的实践初探[J]. 上海中学数学, 2019(11): 6-8.
- [2] 张辉荣、冉彦桃、刘蝶、李东香、蔡金法. 教师“问题提出”教学知识构建[J]. 数学教育学报, 2019(4): 13-17.
- [3] 汪本旺. 谈《基本不等式》的高三复习课之悟[J]. 数学通讯, 2016(8): 56-58.
- [4] 祝玉兰、曾小平. 中小学数学创设情境与提出问题的策略[J]. 数学教育学报, 2004(11): 93-94.

在有效生成中涵育数学核心素养

福建省闽清县第一中学 (350800) 林 婷 林青松

数学课堂是由“预设”和“生成”两个部分组成的.“预设”是教师根据学情和教学目标有目的、有计划地对课堂教学内容所进行的精心设计;“生成”是课堂预设的升华, 使课堂教学“顺学而导”, 是教学生命力与真正价值所在. 数学教学过程具有复杂多变性, 需要教师具有敏锐的课程意识、足够的教学智慧, 寓有形的预设于无形的、动态的课堂教学中, 营造出有利于学生发展的原生态课堂, 为核心素养的落实找到出口与支点, 从而完成数学教育立德树人的目标.

万方数据

1 运用“问题导学”, 在探究中生成

教材是严肃的、权威的, 但并非“至圣”的金科玉律, 如果照本宣科, 就算再高明的教师, 也是不可能把课上得很精彩. 因此, 教师应潜心钻研教材, 在研究教材的基础上遵循学生学习数学的认知规律, 将教学内容“问题化”, 提出既能激发学生学习兴趣, 又具有探究价值的“问题”, 通过师生之间对“问题”的互动建构与交流合作, 提升学生的“问题”意识, 培养学生的探究能力, 从而促进课堂生成.

案例 1 人教 A 版必修第一册“函数的零点与