

以“异面直线所成角”的教学设计为例 谈立体几何的概念教学

俞廉洁 杨元韡 (江苏省常州高级中学 213003)

摘要:以“异面直线所成角”的教学设计为例,给出立体几何概念教学的几个教学建议:立体几何的概念形成要合理利用“基本图形”;立体几何的概念形成要充分运用直观感知;立体几何的空间角的教学要连贯系统;立体几何的空间角的教学要注重培养发散性思维.

关键词:立体几何;概念教学;异面直线所成角;直观感知

立体几何是高中数学的重要组成部分,也是演绎体系的很好的载体,对培养学生空间想象能力、逻辑推理能力有着不可替代的作用.重视逻辑推理,就必须重视立体几何中的公理、定理的教学.而立体几何中的概念教学的重要性有时被忽略,一些重要的概念或一带而过,或直接告知,造成学生理解不够深刻,甚至出现偏差.本文以异面直线所成角的教学设计为例,谈谈对立体几何中概念教学的几点思考.

1 教学设计

1.1 问题情境

问题1 空间中两条直线有哪些位置关系?

预设:平行、相交、异面.

设计意图 回顾两条直线的位置关系,引出要研究的主题——异面直线.

问题2 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,直线 AB 与 CC_1 , CD_1 , CA_1 分别具有怎样的位置关系?

预设: AB 与 CC_1 , CD_1 , CA_1 均是异面的.(追问:什么是异面的?)因为 AB 在平面 $ABCD$ 内, CC_1 , CD_1 , CA_1 均过平面外一点,且过平面内不在直线 AB 上的点 C ,因此由异面直线的判定定理可得 AB 与 CC_1 , CD_1 , CA_1 均是异面的.

设计意图 问题2意在让学生回忆异面直线的判定定理,也为接下来的问题作铺垫——既然三条直线均与 AB 是异面的,那么就可以提出问题:它们之间是否有差异,如何刻画这种差异?

1.2 学生活动

问题3 观察下面几幅图, CC_1 , CD_1 , CA_1 都是和 AB 异面的,但从图形上看,还是有差异

的——倾斜程度不同,你觉得应该怎样去刻画这种倾斜程度呢?

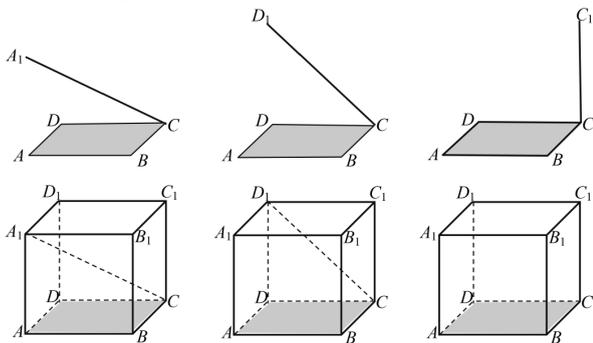


图2

预设:学生很容易会想到要用角度去刻画.这时可以追问用什么角度?我们学习过的角度是相交线构成的平面角.如果此时学生难以往平移上去考虑,可以设置如下提示:初中时学习过“两直线平行,同位角相等”,这说明直线的“平移”这一操作保持其方向不变,并不会改变它与另外一条直线的夹角.以此来启发学生将异面直线中的一条直线平移到与另外一条直线相交.

设计意图 问题3意在让学生感受各组异面直线间存在的差别.通过三组异面直线的图形,可以直观地感受到它们在形状上的区别——倾斜程度不同,进而提问如何去刻画这种异面直线间不同的倾斜程度,引导学生自己提出异面直线所成角的概念.最后还原到正方体中的目的是为了让学生更直观地观察将异面直线平移至相交情形的过程.

问题4 在研究 AB 与 CC_1 所成的角时,除了可以将直线 AB 平移到 CD 外,还可以怎么平移?不同的平移方式是否会产生不同的结果?

预设:还可以将 CC_1 平移到 BB_1 ,甚至可以将两者共同平移至其他位置,结果均不会改变,依

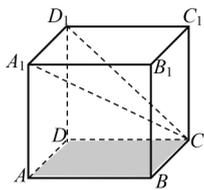


图1

据是等角定理.

设计意图 问题4旨在说明不同的平移方式得到相同的结果,这不仅是对等角定理的一个应用,更是为接下来说明异面直线所成角定义的合理性埋下伏笔.

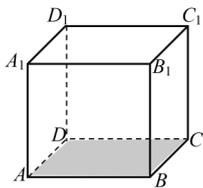


图3

1.3 数学建构

(异面直线所成的角)如图4, a 与 b 是异面直线,经过空间内任意一点 O ,作直线 $a' \parallel a, b' \parallel b$,我们把直线 a' 和 b' 所成的锐角(或直角)叫做异面直线 a, b 所成的角.

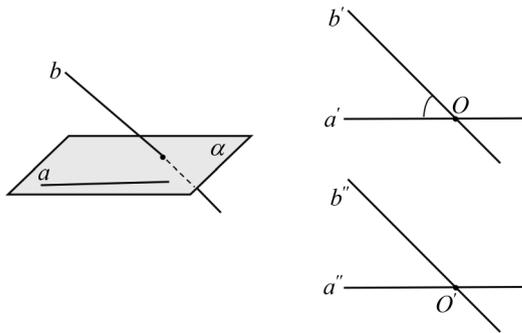


图4

问题5 为什么 a' 和 b' 所成角的大小与点 O 的选择无关?

预设:根据等角定理可知,两个角的两条边分别对应平行,那么这两个角应相等或互补,而两条相交直线所成角只取直角或锐角,因此 a' 和 b' 所成的角与 a'' 和 b'' 所成的角的大小是相等的.这也说明这样的定义是合理的、明确的.

设计意图 从图形上看,这两个角很显然是相等的,但为了不降低对学生逻辑推理能力的要求,加深对概念的理解,设计了问题5.问题5是对前面问题4的呼应,是对异面直线所成角这个定义合理性的一个说明.

问题6 异面直线所成角的大小范围是什么?

预设: $(0, \frac{\pi}{2}]$.

特别地,若异面直线 a, b 所成的角是直角,则称异面直线 a, b 互相垂直,记作 $a \perp b$.

设计意图 这里提出的异面垂直的概念,为后续研究直线与平面垂直作铺垫.同时也要特别强调两直线垂直不仅仅包括相交垂直,也包括异面垂直.

1.4 数学运用

例1 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱

长为 a .

(1) 正方体的哪些棱所在的直线与直线 BC_1 是异面的?

(2) 求异面直线 AA_1 与 BC 所成的角;

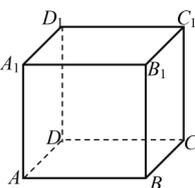


图5

设计意图 本例题的目的是巩固异面直线所成角的概念.在讲解过程中可进一步厘清立体几何中度量问题的解题步骤:作(找)—证—求—答.关于两条异面直线所成角的度量问题,将在“空间向量与立体几何”中作深入的研究,本节课不必拓宽加深.本例的第(2)问,涉及了一个异面垂直的例子,是为了改变学生“只有相交才能垂直”的固有观念.

例2 如图6,在空间四边形 $ABCD$ 中, E, F 分别是对角线 BD, AC 的中点.若 $BC = AD = tEF(t > 0)$.

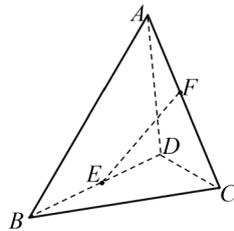


图6

(1) 当 $t=2$ 时,求直线 EF 与 AD 所成的角;

(2) 当 $t = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时,求直线 BC 与 AD 所成的角;

(3) 当 t 为何值时, $BC \perp AD$?

设计意图 本题是利用三角形中位线找平行线的模型,其中将异面直线平移到同一个平面的方式不是惟一的.(1)(2)两个小题根据具体的 t 的值求角,难度略低,需要注意的是第(2)问中需取补角.第(3)小题,需设出边长,根据三角形中边的关系建立方程,解出 t 的值,对学生要求较高.

1.5 课堂小结(略)

2 几点思考

2.1 立体几何的概念形成要合理利用“基本图形”

立体几何中的“基本图形”主要指一些重要的基本几何体,如长方体、三棱锥、圆柱、圆锥以及球,尤其以长方体更为重要,因为点、线、面之间的重要的位置关系,空间角,各种距离等在长方体中都可以找到简洁而直观的背景.在立体几何教学中,合理利用“基本图形”,让这些“基本图形”成为概念概括的典型的感性材料,可以有效地促成概念的形成.这里所说的典型是指能充分体现概念的关键属性,与概念无关的特征少,并且简洁而直观.

例如,异面直线对于学生而言是新内容,有的

学生想象不出异面直线的形象,因此可以利用“衬面”加以“烘托”,即异面直线判定定理的相应图形.事实上这已经是高度简化之后的简略图,也具有一定的直观性.在问题2中,利用正方体这一封闭的“基本图形”寻找异面直线,在这个“基本图形”中进行观察与感受更为直观,再提取出前面的简略图.对初学立体几何的学生而言,从封闭的几何体过渡到不封闭的简略图更为适合,这也遵循了教学的量力性这一基本原则.在问题3中,利用正方体中部分棱的平行关系,更容易激发学生联想,将异面直线中的一条或两条通过平行移动至相交的情形,进而用平面角去定义异面直线所成的角,为异面直线所成角的概念的概括提供了很好的支架.在问题4中,正方体作为“基本图形”,让异面直线所成角这一概念的关键特征更加凸显,尤其是让取点的任意性的缘由(即前面所学习的等角定理)更为直观.

2.2 立体几何的概念形成要充分运用直观感知

立体几何这一章内容主要发展学生的直观想象、逻辑推理、数学运算等数学核心素养,立体几何中的一些概念的形成过程也是发展学生的直观想象的重要契机,不应轻易错过.发展直观想象素养的前提和基础是让学生有一个较为完整的直观感知的体验过程.如果没有经历直观感知这一过程,学生很难全面、准确、深刻地理解概念,很容易造成对概念片面的、孤立的,甚至是错误的理解.

例如,长方体中平行的棱的方向是相同的,研究平行直线的位置关系往往需要研究它们的距离;而异面的两直线,其方向是不同的,而且每一组异面直线方向的倾斜程度也不尽相同,因此就有研究异面直线所成角的必要性.在问题3中,直线 CC_1 , CD_1 , CA_1 都与 AB 异面,但是它们之间的倾斜程度不同,可以让学生体验这个倾斜程度的差异,引发如何来度量这个差异的思考.如果学生联想不到“平移”这一操作,可以利用先行组织者“两直线平行,同位角相等”,让学生直观体验到这一基本事实,即直线的平移是保持直线方向不变的一种操作,从而较为容易地将异面直线 a , b 之间的方向差异转化成相交直线 a , c (其中 c 与 b 平行, c 保持了与 b 的方向不变这一属性)之间的方向的差异.利用平面几何中已有的知识促进学生正迁移,可以帮助学生自主地概括异面直线所成角的概念.

2.3 立体几何的空间角的教学要连贯系统

立体几何中的三个空间角(异面直线所成角、

直线与平面所成角、二面角)既可以刻画特殊的关系,如两直线垂直、直线与平面垂直、两平面垂直等,也可以刻画一般的关系,即可以量化两直线间、直线与平面之间、两平面间的倾斜程度.三个空间角的教学应该注重连贯系统.

首先,用平面角刻画异面直线所成的角,给刻画其他空间角的方法提供了范例,即也可以尝试用平面角来刻画其他空间角等(事实上也是如此).

其次,三个空间角的度量方式不尽相同,但是仍有相通之处.异面直线所成角的概念中的“相交直线所成的锐角或直角”体现了“最小”的特征,在直线与平面所成角中也有体现,即直线与平面所成角实质上也是直线与该平面中所有直线所成角中最小的.异面直线所成角的大小的确定性以等角定理为基础,二面角的平面角的大小的确定性也以等角定理为基础.

再次,异面直线所成角的概念的辨析过程充分体现了数学概念的合理性(如确定性等),为其他空间角的概念辨析提供了范例,以加深对概念本质属性的理解.例如,本案例的问题5中,提出为什么在空间中取点具有“任意性”等.

因此,异面直线所成角的概念的某些方面可以作为其他空间角的先行组织者,将三个空间角的教学联系起来,使这些概念构成连贯系统的概念体系.

2.4 立体几何的空间角的教学要注重培养发散性思维

立体几何中的空间角和距离的计算,往往需要“作(找)—证—算—答”等几个步骤.学生容易在“作(找)”这个环节出现问题,即不清楚怎么“作(找)”.事实上,从空间角的概念出发,作图具有不确定性,这给“作(找)”的方式以极大的灵活性.以例2的第(1)问为例,既可以过点 E 作 AD 的平行线,也可以过点 F 作 AD 的平行线,选点的方式是多样的,若过点 A 或 D 作 EF 的平行线解决问题就比较困难.因此,平移的过程是需要“试验”的,可行的平移方案往往不唯一,某些平移方案可能会带来较大的困难.这样的“试验”有利于培养学生的发散性思维.在立体几何空间角的例题教学中问题的解决不应浅尝辄止,要引导学生从多个角度去分析与解决问题,再对这些方法的优劣进行比较与反思,积累基本活动经验.例如,在求解异面直线所成角的过程中,构造三角形中位线模型或平行四边形模型就是非常重要的活动经验.