

关注几何性质 透析命题视角

——以“阿波罗尼斯圆”为例

□ 周 涛

(江苏省江浦高级中学文昌校区, 江苏南京 211800)

一、问题的由来

众所周知,在平面内到两个定点距离之比等于定值 k ($k > 0$ 且 $k \neq 1$) 的动点的轨迹是圆.常把此圆称为阿波罗尼斯 (Apollonius) 圆.近年来以阿波罗尼斯圆为背景的试题在高考中频频出现,如 2006 年四川卷第 6 题、2008 年四川卷第 12 题,特别是 2008 年江苏卷第 13 题 (若 $AB=2, AC=\sqrt{2}BC$, 则 $\triangle ABC$ 的面积的最大值是 $\underline{\hspace{1cm}}$) 更是为广大中

学师生津津乐道,同时也掀起了一股研究利用阿波罗尼斯圆解高考试题的热潮.

近期笔者对以阿波罗尼斯圆为背景的解析几何试题进行了归类整理,本文主要从阿波罗尼斯圆几何性质的视角谈谈解析几何试题的命制.不当之处,敬请指正.

二、阿波罗尼斯圆的几何性质

命题 1 如图 1, M, N 分别为线段 AB 的内、外

出学生操练中出现的偏失, 而且还要提醒学生对有关偏失的特别关注.这应当是评析的“主打品牌”而非“慈善募捐”.评析学生的课堂操练 (过程和结果), 其实相当于复习阶段司空见惯的“练习分析”, 而练习分析则需要特别指出某些共性错误, 以引起学生足够重视, 即“警示失误”.复习实践证明, 处在学生兴奋高潮时的课堂“热提醒”, 收效要比诸多事后的“冷提醒”理想得多.

六、升格

应该说, 完成了以上“点拨”“示范”“操练”“呈现”“评析”等环节, 复习课堂已经够踏实而充分了, 只要每个环节做到基本落实, 即便就此打住, 其有效性也不会太逊色了.然而, 从精益求精的高度和多数学科的性质考虑, 还应该再添加“升格”这一步骤 (环节).如果说“评析”能让学生了解呈现的解答 (过程和结果) 具体“怎么样”, 那么“升格”就是帮助学生学会“如何”进行完善, 使原先存在不足的解答符合要求.

分析那些成功的复习课堂可知, “升格”过程大致表现为如下策略和技法 1. 增补. 尽管学生解答的问题各种各样, 五花八门, 但课堂操练的时间、氛围、心理、场景等因素会或多或少影响学生能力的正常发挥, 导致解答过程的不完整或者形成的答案不全面, 此类现象可谓比比皆是, 成为“升格”的重点之

一. 增补, 就是针对“不完整”之处、“不全面”之所, 进行恰当的添加与补充——如果是过程“断裂”, 就添加“链接”; 假如是答案残缺, 便补充“信息”.针对性地增补了若干“链接”和有关“信息”, 便在一定程度上完善了原先的解答, “升格”也就自然达成了. 2. 修改. 跟“增补”不同的是, 修改重在“修正”和“改动”, 主要针对那些过程或结果不符合要求的解答, 可能是虽有过程但不够规范或出现差池, 也可能是虽有答案但存在计算、推理、表达 (包括符号、文字等书写) 等偏误等, 只有通过“修改”才能真正得以“升格”.倘若问题严重, 就必须进行“修正”, 使之符合要求. 如果问题一般, 则可以采用“改动”, 让它闪亮生辉. 无论怎样指导学生修改, 其根本目的都在于不折不扣地落实“升格”. 3. 置换. 课堂上学生即兴呈现的解答, 有时会出现解题思路的方向性偏颇, 造成无论是解答过程还是解答结果的部分甚或整体的答非所问, “面目全非”.欲“升格”此类偏差较大的解答, 仅靠“增补”“修改”也许难以奏效, “置换”显得责无旁贷了. 置换, 这里就是“替换”之意, 指的是根据试题特点和题干指向, 对原解答中出入较大的那一部分进行重新打造, 使其“脱胎换骨”, 从而基本符合或者完全符合考查要求. 如果是整个解答都出现偏离, 则只有“另起炉灶”才能真正“升格”了. ■



分点,且 $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NB} = k$ ($k > 0$ 且 $k \neq 1$), $\odot O$ 是以 MN 为直径的圆,若动点满足 $\frac{PA}{PB} = k$,则点 P 的轨迹为 $\odot O$.

命题 1 就是著名的阿波罗尼斯轨迹定理,以 MN 为直径的 $\odot O$ 叫做阿波罗尼斯圆.

利用几何方法很容易证明上述结论,不妨设 $k > 1$ (图 1 为 $k > 1$ 的情形).由已知得 $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NB} =$

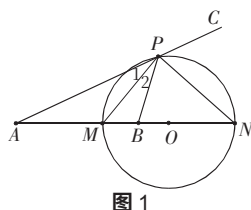


图 1

$\frac{PA}{PB} = k$, 根据三角形内、外角平分线性质的逆定理, PM, PN 分别为 $\triangle PAB$ 的内角 APB 与外角 BPC 的平分线,所以 $\angle MPN$ 为直角,

从而点 P 的轨迹是以 MN 为直径的圆.

我们再来看两个与阿波罗尼斯圆相关的命题并加以证明.

命题 2 M, N 分别为线段 AB 的内、外分点,且 $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NB} = k$ ($k > 0$ 且 $k \neq 1$), $\odot O$ 是以 MN 为直径的圆,若动点 P 在 $\odot O$ 上,则 $\frac{PA}{PB} = k$.

证明 记 $\angle APM = \angle 1, \angle BPM = \angle 2$. 在 $\triangle PAM$ 与 $\triangle PAN$ 中运用正弦定理得:

$$\frac{AM}{PA} = \frac{\sin \angle 1}{\sin \angle PMA}, \frac{AN}{PA} = \frac{\sin (90^\circ + \angle 1)}{\sin \angle PNA},$$

$$\text{从而得 } \frac{AM}{AN} = \frac{\sin \angle 1}{\cos \angle 1} \cdot \frac{\sin \angle PNA}{\sin \angle PMA}. \quad (1)$$

在 $\triangle PBM$ 与 $\triangle PBN$ 中运用正弦定理得:

$$\frac{MB}{PB} = \frac{\sin \angle 2}{\sin \angle PMB}, \frac{NB}{PB} = \frac{\sin (90^\circ - \angle 2)}{\sin \angle PNB},$$

$$\text{从而得 } \frac{MB}{NB} = \frac{\sin \angle 2}{\cos \angle 2} \cdot \frac{\sin \angle PNB}{\sin \angle PMB}. \quad (2)$$

注意到 $\sin \angle PMA = \sin \angle PMB, \frac{AM}{AN} = \frac{MB}{NB}$, 由 (1)

②得: $\angle 1 = \angle 2$, 故 $\frac{PA}{PB} = \frac{AM}{MB} = k$.

命题 3 M, N 分别为线段 AB 的内、外分点, $\odot O$ 是以 MN 为直径的圆, 点 P 为 $\odot O$ 上一点且满足

$$\frac{PA}{PB} = \frac{AM}{MB}, \text{ 则 } \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NB}.$$

证明 由 $\frac{PA}{PB} = \frac{AM}{MB}$ 知 PM 平分 $\angle APB$, 又因为点 P 在 $\odot O$ 上, 所以 $\angle 2 + \angle BPN = 90^\circ$, 从而 $\angle 1 +$

$\angle CPN = 90^\circ$, 故 PN 平分 $\angle BPC$, 所以 $\frac{PA}{PB} = \frac{AN}{NB}$, 即 $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NB}$.

实际上,阿波罗尼斯圆的几何性质主要与下面三个条件相关.

(I) PM 平分 $\angle APB$ ($\frac{PA}{PB} = \frac{AM}{MB}$);

(II) $PM \perp PN$ (P 在以 MN 为直径的圆上);

(III) $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NB}$ (圆周按定比 k 内分且外分线

段 AB).

通过对命题 1、2、3 的表述及证明可以看出:上述三个条件中, 由其中的任意两个都可以推出第三个.

三、命题视角透析

阿波罗尼斯圆丰富的几何性质给了我们多变的命题视角.就命题而言我们常常会对同一问题采用不同的提问方式,或是对某一问题采用逆向、推广和拓展等方式展开,请看实例,笔者先利用常规的解析法进行求解,再从几何性质的角度进行评析.

1. 常规视角 —— 变换条件结论, 关注思维的发散性

变换试题的条件与结论,探寻对问题的多角度研究方向是试题命制的常规视角.如“原命题成立,是否逆命题也成立”,“一个数学问题的逆向问题有那些”等都可以成为命题的素材.

① (I) (III) $\Rightarrow$ (II)

例 1 已知点 $P(x, y)$ 与两个定点 $B(1, 0), A(4, 0)$ 的距离之比为 $\frac{1}{2}$, 求点 P 的轨迹方程.

解 由 $\frac{PB}{PA} = \frac{1}{2}$, 得 $(x-4)^2 + y^2 = 4[(x-1)^2 + y^2]$, 所

以点 P 的轨迹方程为 $x^2 + y^2 = 4$.

评析:不难看出点 $M(2, 0), N(-2, 0)$ 分别按定比 $\frac{1}{2}$ 内分、外分线段 BA , 而 $\frac{PB}{PA} = \frac{1}{2}$, 所以点 P 的轨迹是以 MN 为直径的圆.

② (II) (III) $\Rightarrow$ (I)

例 2 已知两个定点 $A(4, 0), B(1, 0), \odot O: x^2 + y^2 = 4$, 若 P 是 $\odot O$ 上任意一点, 求证: $\frac{PB}{PA}$ 是定值.

证明 设 $P(x, y)$ 是 $\odot O: x^2 + y^2 = 4$ 上任意一点, 则 $y^2 = 4 - x^2$,

$$\frac{PB}{PA} = \frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\sqrt{(x-4)^2+y^2}} = \sqrt{\frac{5-2x}{20-8x}} = \frac{1}{2}.$$

评析 因为 $\odot O$ 与直线 BA 交于点 $M(2,0), N(-2,0)$,而 $\frac{MB}{AM} = \frac{NB}{AN} = \frac{1}{2}$, P 是 $\odot O$ 上任意一点,所以 $\frac{PB}{PA} = \frac{MB}{AM} = \frac{1}{2}$.

2. 热点视角——改变设问方式,强调问题的开放性

近年来,特别是高考试题在设问上已经突破了固定的“已知——求解”这种封闭的数学推理、判断和计算的模式,而研究发展试题的设问方向,丰富试题的设问形式成为了命题的一个热点视角.该视角下命制的试题在解答上突破了停留在明确的、直接的结论层面,增加了问题的开放性.这类试题通过开放式的设问背景,能比较客观、全面地测量学生观察、试验、联想、猜想、归纳、类比、推广等思维活动的水平,对于激发学生探索精神、求异创新思维等有着积极的意义.

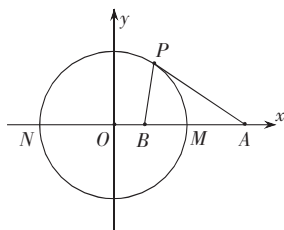


图2

例3 如图2,已知 $\odot O: x^2+y^2=4$,点 $A(4,0)$,在 x 轴上是否存在定点 B (不同于点 A),满足:对于 $\odot O$ 上任意一点 P ,都有 $\frac{PB}{PA}$

为定值.如果存在,试求所有满足条件的点 B 的坐标.如果不存在,请说明理由.

解 假设存在这样的点 $B(s,0)$,使得 $\frac{PB}{PA} = \lambda$,设 $P(x,y)$ 是 $\odot O$ 上任意一点,由 $PB^2 = \lambda^2 PA^2$,得 $(x-s)^2+y^2 = \lambda^2[(x-4)^2+y^2]$,注意到 $y^2=4-x^2$,化简得 $(8\lambda^2-2s)x+s^2-20\lambda^2+4=0$ 对 $x \in [-2,2]$ 恒成立.

$$\text{所以} \begin{cases} 8\lambda^2-2s=0, \\ s^2-20\lambda^2+4=0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} s=1, \\ \lambda=\frac{1}{2}, \end{cases} \text{或} \begin{cases} s=4, \\ \lambda=1, \end{cases} \text{(舍去),}$$

故存在点 $B(1,0)$ 对于 $\odot O$ 上任意一点 P ,都有 $\frac{PB}{PA} = \frac{1}{2}$.

评析 本题也可以这样表述:已知 $\odot O: x^2+y^2=4$,点 $A(4,0)$,点 B 在 x 轴上且 $\frac{PB}{PA}$ 为定值,求点 B 的坐标.但很明显前者的问题更开放,因为设问方式的

改变使得求解本题至少得思考两个问题,一是否存在,二才是如何求解.解决这类“存在探索型”问题一般先假设结论成立或研究对象存在.

从解法分析,因为对于 $\odot O$ 上任意一点 P ,都有 $\frac{PB}{PA}$ 为定值,而 $M(2,0), N(-2,0)$ 在 $\odot O$ 上,于是 $\frac{PB}{PA} = \frac{MB}{AM} = \frac{NB}{AN}$,即 $\frac{|s-2|}{2} = \frac{|s+2|}{6}$,解得 $s=1$.再

证明 $B(1,0)$ 对于 $\odot O$ 上任意一点 P ,都有 $\frac{PB}{PA}$ 为定值(证法同例2).这种解法先通过特殊点探求点 B ,再作一般性的证明,从特殊到一般,解法合理高效.

3. 经典视角——从静止到运动,增加试题的探究性

研究图形的运动变化规律及运动变化过程中的不变量是解析几何命题的重要视角之一.解题时常从特殊(静止)情形的分析,逐步过渡到一般(运动)情形的求解,最后达到揭示问题本质的目的.

例3中的点 $A(4,0)$ 是定点,为了进一步增加问题的探究性,可以让点 A 动起来.

例4 如图3,已知 $\odot O: x^2+y^2=4$,点 A 是 $l: x=4$ 上纵坐标为 t 的点,求证:存在一个异于点 A 的点 B ,对于

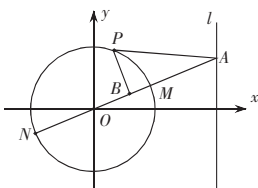


图3

$\odot O$ 上任意一点 P ,有 $\frac{PB}{PA}$

为定值,且当点 A 在直线 l 上运动时,点 B 在一个定圆上.

证明 设 $\odot O$ 上任意一点 $P(x,y)$,定点 $B(x_0, y_0)$, $\frac{PB^2}{PA^2} = \lambda$ ($\lambda > 0$,且 $\lambda \neq 1$), l 上取定的点 $A(4,t)$,即 $(x_0-4)^2+(y_0-t)^2 = \lambda[(x_0-4)^2+(y_0-t)^2]$,化简得 $(x_0^2+y_0^2+16+t^2-8x_0-2ty)\lambda = (x_0^2+y_0^2+16+t^2-8x_0-2ty)$.

将 $x_0^2+y_0^2=4$ 代入得 $-2xx_0-2yy_0+x^2+y^2+4 = -8\lambda x_0-2\lambda ty_0+(20+t^2)\lambda$.

$$\begin{cases} x=4\lambda, & (1) \\ y=t\lambda, & (2) \\ x^2+y^2+4=(20+t^2)\lambda & (3) \end{cases}$$

由(1)(2)代入(3),得 $16\lambda+t^2\lambda^2+4=(20+t^2)\lambda$,整理得 $(16+t^2)\lambda^2-(20+t^2)\lambda+4=0$,即 $(\lambda-1)[(16+t^2)\lambda-4]=0$,因为 $\lambda \neq 1$,所以 $\lambda =$



$\frac{4}{16+t^2}$, 故存在一个异于点 A 的点 B , 对于 $\odot O$ 上任意一点 P , 均有 $\frac{PB}{PA}$ 为定值.

又 $16+t^2=\frac{4}{\lambda}$, 代入 (3) 得 $x^2+y^2+4=(\frac{4}{\lambda}+4)\lambda$, 即 $x^2+y^2=4\lambda$, 于是 $x^2+y^2=x$, 即 $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$, 故点 B 在圆心 $(\frac{1}{2}, 0)$, 半径为 $\frac{1}{2}$ 的定圆上.

评析: 实际上如果从几何性质的角度切入, 定值 λ 是很容易得到的, 与例 3 类似可以先通过特殊点探求点 B , 再验证.

如图 3, $B(x_0, y_0)$, $A(4, 0)$, M, N 为直线 BA 与 $\odot O$ 的两个交点, 由 $\frac{MB}{AM} = \frac{NB}{AN} (= \frac{PB}{PA})$, 得 $\frac{MB}{\sqrt{16+t^2}-2} = \frac{4-MB}{\sqrt{16+t^2}+2}$, 解得 $MB=2-\frac{4}{\sqrt{16+t^2}}$, $OB=2-BM=\frac{4}{\sqrt{16+t^2}}$, 由 $\frac{OA}{OB} = \frac{4}{x} = \frac{t}{y}$, 得 $x=\frac{16}{16+t^2}$, $y=\frac{4t}{16+t^2}$, 即 $B(\frac{16}{16+t^2}, \frac{4t}{16+t^2})$.

下面证明对于 $\odot O$ 上任意一点 $P(x_0, y_0)$, 有 $\frac{PB}{PA}$ 为定值, 注意到 $x_0^2+y_0^2=4$,

$$\frac{PB^2}{PA^2} = \frac{(x_0 - \frac{16}{16+t^2})^2 + (y_0 - \frac{4t}{16+t^2})^2}{(x_0 - 4)^2 + (y_0 - 0)^2} = \frac{4(20+t^2-8x_0-2ty_0)}{(20+t^2-8x_0-2ty_0)(16+t^2)} = \frac{4}{16+t^2} \text{ (定值)},$$

而 $x=\frac{16}{16+t^2}$, $y=\frac{4t}{16+t^2}$, 消去 t 得点 B 的轨迹方程 $x^2+y^2=x$.

4. 创新视角——引入新元素, 重视知识的交汇性

目前的高中数学课程是以模块和专题的形式呈现的, 因此, 注意沟通各部分内容之间的联系也成为了数学命题的一个创新视角. 这类试题通过知识的迁移与交汇使学生体会知识之间的有机联系, 感受数学的整体性.

例 3 中直接给出点 $A(4, 0)$ 探究点 B , 若点 A 未知, 我们也可以用其它的方式来联系点 $A(a, 0)$ 与点 $B(c, 0)$, 比如 $a^2-c^2=4$, 为此引入新元素“椭圆”.

例 5 如图 4, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1 (a > 2)$, $\odot O: x^2+y^2=4$, 点 A, B 分别为椭圆 C 的右顶点和右

焦点, 对于 $\odot O$ 上任意一点 P , 是否存在这样的椭圆 C , 使得 $\frac{PB}{PA}$ 为定

值? 如果存在, 试求椭圆 C 的方程; 如果不存在, 请说明理由.

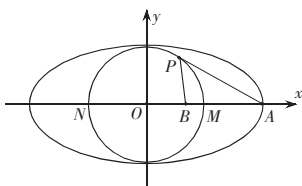


图 4

解: 设 $B(c, 0)$, $c^2=a^2-4$, 设 $P(x_0, y_0)$, $\frac{PB^2}{PA^2}=\lambda$ (λ 为常数), 则有 $(x_0-c)^2+y_0^2=\lambda[(x_0-a)^2+y_0^2]$, 即 $4-2cx_0+c^2=\lambda[4-2ax_0+a^2]$ 对 $x_0 \in [-2, 2]$ 恒成立,

所以 $\begin{cases} 4+c^2=\lambda(4+a^2) \\ c=\lambda a \end{cases}$, 消去 λ 得 $4a+ac^2=4c+a^2c$,

即 $(c-a)(ac-4)=0$, 因为 $c \neq a$, 所以 $ac=4$, 又因为 $c^2=a^2-4$, 解得 $a^2=2+2\sqrt{5}$, $c^2=2\sqrt{5}-2$, 故存在这样的椭圆 C , 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2+2\sqrt{5}} + \frac{y^2}{4} = 1$.

评析: 新元素的引入使得试题的条件产生了变化, 增加了知识的交汇性, 而解决问题的方法却没有改变. 若将椭圆 C 与 $\odot O$ 方程中的“4”改为“ b^2 ”, 我们还可以去探究椭圆 C 的离心率.

例 6 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, $\odot O:$

$x^2+y^2=b^2$, 点 A, B 分别为椭圆 C 的右顶点和右焦点, 对于 $\odot O$ 上任意一点 P , 是否存在这样的椭圆 C , 使得 $\frac{PB}{PA}$ 为定值? 如果存在, 试求椭圆 C 的离心率; 如果不存在, 请说明理由.

解法同例 5, 也可以类似例 3 通过特殊点 M, N 先探求离心率.

如图 4, 由 $\frac{MB}{AM} = \frac{NB}{AN} (= \frac{PB}{PA})$, 得 $\frac{b-c}{a-b} = \frac{b+c}{a+b}$,

即 $ac=b^2$, 从而 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

此时 $A(\frac{b}{\sqrt{e}}, 0)$, $B(\sqrt{e}b, 0)$, 再去证明对

于 $\odot O$ 上任意一点 P , 有 $\frac{PB}{PA}$ 为定值 (解略).

关注几何性质, 探寻几何问题的内涵与外延可以帮助我们认识试题命制的“台前幕后”. 上述实例使我们看到: 一个并不深奥的几何性质在科学恰当的命题视角下一样可以命制出形式美妙、内容和谐、结果深刻的鲜活试题. ▮