

2020 年普通高等学校招生全国统一考试适应性考试（江苏卷）

数学 I 必做题部分

注 意 事 项

考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求：

1. 本试卷共 4 页，均为非选择题（第 1 题～第 20 题，共 20 题）。本卷满分为 160 分。考试时间为 120 分钟。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请您务必将自己的姓名、考试证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与您本人是否相符。
4. 作答试题必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡的指定位置作答，在其它位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

棱台的体积公式为 $V_{\text{台体}} = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{S \cdot S'} + S')$

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共计 70 分。请把答案填写在答题卡相应位置上。

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, a\}$, $B = \{0, \sqrt{a}\}$. 若 $B \subseteq A$, 则实数 a 的值为 ▲ .

【答案】 1

2. 设 i 是虚数单位，若复数 $m + \frac{10}{3+i}(m \in \mathbf{R})$ 是纯虚数，则 m 的值为 ▲ .

【答案】 -3

3. 已知三位同学参加运动会跳高、跳远、铅球项目的比赛. 若每人都选择其中两个项目，则有且仅有两人选择的项目完全相同的概率是 ▲ .

【答案】 $\frac{2}{3}$

4. 执行如图所示的伪代码，输出 i 的值为 ▲ .

【答案】 7

```

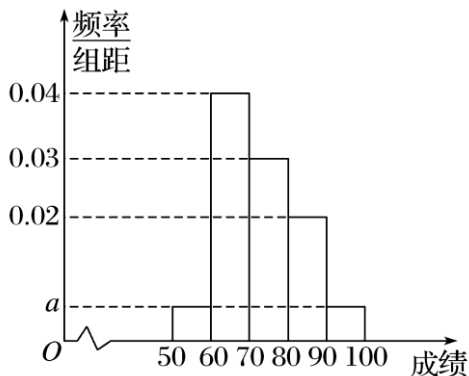
i ← 1
S ← 0
While S < 20
    S ← 2S + 3
    i ← i + 2
End While
Print i

```

第 4 题图

5. 某校 100 名学生数学填空题大赛成绩的频率分布直方图如图所示，其中成绩分组区间是：

[50,60), [60,70), [70,80), [80,90), [90,100], 则图中 a 的值为_____▲_____.



【答案】 0.005

6. 若命题 “ $\exists t \in \mathbf{R}, t^2 - 2t - a < 0$ ” 是假命题, 则实数 a 的取值范围是_____▲_____.

【答案】 $(-\infty, -1]$

7. 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递减, $f(2) = 0$. 若 $f(x-1) > 0$, 则 x 的取值范围是_____▲_____.

【答案】 $(-1, 3)$

8. 正四棱台的下底面棱长为 4, 上底面棱长和侧棱长均为 2, 则该四棱台的体积为_____▲_____.

【答案】 $\frac{28}{3}\sqrt{2}$

9. 已知直线 $3x + 4y - 15 = 0$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = 25$ 交于 A, B 两点, 点 C 在圆 O 上, 且 $S_{\triangle ABC} = 8$, 则满足条件的点 C 的个数为_____▲_____.

【答案】 3

10. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 a_5 = 2a_3$, 且 $a_4, \frac{5}{4}, 2a_7$ 成等差数列, 则 $a_1 a_2 \dots a_n$ 的最大值为_____▲_____.

【答案】 1024

11. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 有相同的焦点 F , 点 A 是两曲线的一个交点, 若直线 AF 的斜率为 $\sqrt{3}$, 则双曲线的离心率为_____▲_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{7} + 2}{3}$

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ \log_2 x, & x > 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f[f(x) - m] - \frac{1}{2}$ 恰有三个不同的零点, 则实

数 m 的取值范围为 ▲ .

【答案】 $\left(1-\sqrt{2}, \frac{3}{2}\right]$

13. 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 60^\circ$, 点 D 、 E 分别为边 AC 、 BC 的中点, 且 AE 交 BD 于点 O , 若 $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}$, $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC} = 10$, 则 $\triangle ABC$ 的周长为 ▲ .

【答案】 $6+2\sqrt{3}$

14. 已知 $\triangle ABC$ 面积为 S , 若 $10c^2 + 5a^2 = 4b^2$, 则 $\frac{20S}{15a^2 + 6b^2}$ 的最大值是 ▲ .

【答案】 $\frac{1}{6}$

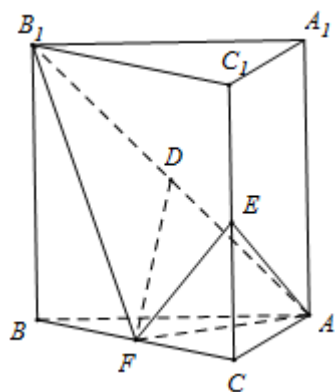
二、解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分。请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.(本小题满分 14 分)

已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, $\angle BAC = 90^\circ$, 且 $AB = AA_1$, 点 D , E , F 分别为 AB_1 , CC_1 , BC 的中点.

(1) 求证: $DF \parallel$ 平面 ACC_1A_1 ;

(2) 求证: $EF \perp$ 平面 B_1AF .



证明: (1) 连接 A_1B , A_1C , 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧面 ABB_1A_1 是平行四边形,

$\because$ 平行四边形对角线互相平分, D 是 AB_1 中点, $\therefore D$ 是 A_1B 中点,

又 F 是 BC 中点, $\therefore DF \parallel A_1C$,3 分

$\because DF \not\subset$ 平面 ACC_1A_1 , $A_1C \subset$ 平面 ACC_1A_1 , $\therefore DF \parallel$ 平面 ACC_1A_16 分

(2) $\because \triangle ABC$ 为等腰直角三角形, $\angle BAC = 90^\circ$, $\therefore AB = AC$,

$\because F$ 是 BC 中点, $\therefore AF \perp BC$,7 分

直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $BB_1 \perp$ 平面 ABC , $AF \subset$ 平面 ABC , $\therefore BB_1 \perp AF$,8 分

$\because BC \cap BB_1 = B$, BC 、 BB_1 在平面 BCC_1B_1 内,

$\therefore AF \perp \text{平面 } BCC_1B_1$, $\because EF \subset \text{平面 } BCC_1B_1$, $\therefore AF \perp EF$,10 分

直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $BB_1 \perp \text{平面 } ABC$, $BC \subset \text{平面 } ABC$,

$\therefore BB_1 \perp BC$, 又侧面 BCC_1B_1 是平行四边形, $\therefore$ 四边形 BCC_1B_1 是矩形,

$\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $\angle BAC=90^\circ$, 且 $AB=AA_1$, $\therefore BC=\sqrt{2}BB_1$,11 分

$\because F$ 是 BC 中点, E 是 CC_1 中点, $\therefore \triangle B_1BF \sim \triangle FCE$,

$\therefore \angle BFB_1 = \angle CEF$, $\therefore \angle BB_1F = \angle CFE$,

$\because \angle BB_1F + \angle BFB_1 = \angle CEF + \angle CFE = 90^\circ$,

$\therefore \angle BFB_1 + \angle CFE = 90^\circ$, $\therefore EF \perp B_1F$,13 分

$\because AF \cap B_1F = F$, AF, B_1F 在平面 B_1AF 内, $\therefore EF \perp \text{平面 } B_1AF$14 分

16.(本小题满分 14 分)

已知向量 $\mathbf{a} = (\cos x, \sin x)$, $\mathbf{b} = (3, -\sqrt{3})$, $x \in [0, \pi]$.

(1) 若 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 求 x 的值;

(2) 记 $f(x) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, 求 $f(x)$ 的最大值和最小值以及对应的 x 的值.

【解】 (1) 因为 $\vec{a} = (\cos x, \sin x)$, $\vec{b} = (3, -\sqrt{3})$, $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 所以 $-\sqrt{3} \cos x = 3 \sin x$.

若 $\cos x = 0$, 则 $\sin x = 0$, 与 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 矛盾, 故 $\cos x \neq 0$.

于是 $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, 又 $x \in [0, \pi]$, 所以 $x = \frac{5\pi}{6}$.

(2) $f(x) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\cos x, \sin x) \cdot (3, -\sqrt{3}) = 3 \cos x - \sqrt{3} \sin x = 2\sqrt{3} \cos(x + \frac{\pi}{6})$.

因为 $x \in [0, \pi]$, 所以 $x + \frac{\pi}{6} \in [\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}]$, 从而 $-1 \leq \cos(x + \frac{\pi}{6}) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

于是, 当 $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$, 即 $x = 0$ 时, $f(x)$ 取到最大值 3;

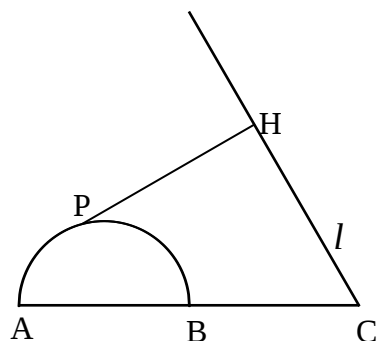
当 $x + \frac{\pi}{6} = \pi$, 即 $x = \frac{5\pi}{6}$ 时, $f(x)$ 取到最小值 $-2\sqrt{3}$.

17.(本小题满分 14 分)

如图, 某公园一角有一半圆形花坛, 直径 AB 长为 $2a$ 米, 公园拐角 C 处有一条与 AB 所在直线成 60° 的直路 l , CB 长亦为 $2a$ 米, 现过 A 处沿花坛边缘修建一段道路到 P 处 (道路宽度不计), 再从 P 处修一条与直路 l 垂直的道路 PH , 此段路不得从花坛内经过, 已知沿花坛边缘的道路造价为 k 元每米, 从 P 处到 l 的直路造价为 $2k$ 元每米.

(1) 试选择合适的变量, 将两段道路总造价表示为该变量的函数, 并写出该函数的定义域;

(2) 求出道路总造价的最小值.



解: (1) 设半圆的圆心为 O , $\angle AOP = \theta$, 则弧 AP 长为 $a\theta$ 米, 由道路 PH 不得从花坛内经过得 $\theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$. 过点 P 作 $PQ \parallel l$, 交线段 AC 于点 Q , 过点 Q 作 $QD \perp l$, 垂足为 D . 则 $\angle PQO = \angle C = \frac{\pi}{3}$, $\angle OPQ = \theta - \frac{\pi}{3}$.

在 $\triangle POQ$ 中, 由正弦定理得: $\frac{OP}{\sin \angle PQO} = \frac{OQ}{\sin \angle OPQ}$,

$$\text{即 } \frac{a}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{OQ}{\sin(\theta - \frac{\pi}{3})}, \text{ 所以 } OQ = \frac{2a \sin(\theta - \frac{\pi}{3})}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore CQ = OC - OQ = 3a - \frac{2a \sin(\theta - \frac{\pi}{3})}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore PH = DQ = CQ \sin \frac{\pi}{3} = \left(3a - \frac{2a \sin(\theta - \frac{\pi}{3})}{\sqrt{3}}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a - a \sin(\theta - \frac{\pi}{3}),$$

设道路总造价为 $f(\theta)$ 元, 则

$$f(\theta) = ka\theta + 2k \left[\frac{3\sqrt{3}}{2}a - a \sin(\theta - \frac{\pi}{3}) \right] = ka \left[\theta + 3\sqrt{3} - 2 \sin(\theta - \frac{\pi}{3}) \right]; \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi \right]$$

(2) 由 (1) 得 $f'(\theta) = ka \left[1 - 2 \cos \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) \right]$, 令 $f'(\theta) = 0$ 得 $\cos \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$, 又 $\theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi \right]$,

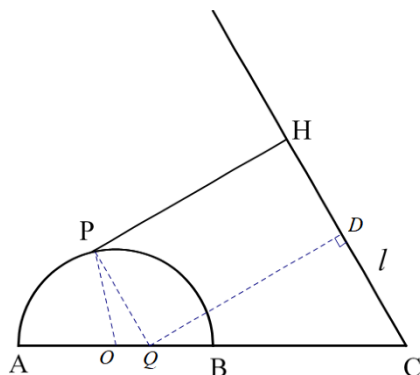
所以 $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

将 $\theta, f'(\theta), f(\theta)$ 的关系列表如下:

θ	$\frac{\pi}{3}$	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$	$\frac{2\pi}{3}$	$\left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$	π
$f'(\theta)$		—	0	+	
$f(\theta)$		单调减	极小值	单调增	

由表格可知, 当 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ 时, $f(\theta)_{\min} = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}\right)ka$.

答: (1) 以 $\angle AOP$ 为自变量 θ , 总造价可用 θ 表示为



$$f(\theta) = ka \left[\theta + 3\sqrt{3} - 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \right]; \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi \right]$$

(2) 道路总造价的最小值为 $2\left(\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}\right)ka$ 元。

18.(本小题满分 16 分)

如图, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 并且椭圆经过点 $P(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$,

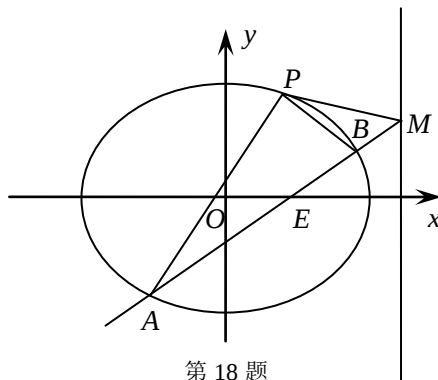
直线 l 的方程为 $x = 4$.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 已知椭圆内一点 $E(1, 0)$, 过点 E 作一条斜率为 k 的直线与椭圆交于 A, B 两点, 交直

线 l 于点 M , 记 PA, PB, PM 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 . 问: 是否存在常数 λ , 使得

$k_1 + k_2 = \lambda k_3$? 若存在, 求出 λ 的值; 若不存在, 请说明理由.



第 18 题

解: (1) 因为椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $\frac{b^2}{a^2} = 1 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{4}$,

又椭圆过点 $P(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 所以 $\frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1$,

所以 $a^2 = 4$, $b^2 = 1$, 所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 设直线 AB 的方程为: $y = k(x-1)$, 令 $x = 4$, 则 $y = 3k$, 所以点 $M(4, 3k)$,

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$

$$\begin{aligned} \text{所以 } k_1 + k_2 &= \frac{y_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{x_1 - 1} + \frac{y_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{x_2 - 1} = \frac{k(x_1 - 1) - \frac{\sqrt{3}}{2}}{x_1 - 1} + \frac{k(x_2 - 1) - \frac{\sqrt{3}}{2}}{x_2 - 1} \\ &= 2k - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1} \right) = 2k - \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{x_1 + x_2 - 2}{x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1} \right]. \end{aligned}$$

由 $\begin{cases} y = k(x-1), \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$, 可得 $(1+4k^2)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 4 = 0$.

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{1+4k^2}, \quad x_1x_2 = \frac{4k^2-4}{1+4k^2},$$

$$\text{所以 } k_1 + k_2 = 2k - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\frac{8k^2}{1+4k^2} - 2}{\frac{4k^2-4}{1+4k^2} - \frac{8k^2}{1+4k^2} + 1} = 2k - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{又因为 } k_3 = \frac{3k - \frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = k - \frac{\sqrt{3}}{6}, \text{ 所以 } k_1 + k_2 = 2k_3,$$

所以存在 $\lambda = 2$, 使得 $k_1 + k_2 = 2k_3$.

19.(本小题满分 16 分)

已知函数 $f(x) = x \ln x + \frac{a}{2x} (a \in \mathbb{R})$.

(1) 若函数 $f(x)$ 的图像在 $x=1$ 处的切线方程为 $2x - y + b = 0$, 求 a, b 的值;

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个不同的零点 x_1, x_2 .

①求实数 a 的取值范围;

②证明 $x_1x_2 > a$.

$$\text{解: } \because f(x) = x \ln x + \frac{a}{2x}, \therefore f'(x) = \ln x + 1 - \frac{a}{2x^2},$$

(1) $\because$ 函数 $f(x)$ 的图像在 $x=1$ 处的切线方程为 $2x - y + b = 0$,

$$\therefore f'(1) = 1 - \frac{a}{2} = 2, \therefore a = -2, \therefore f(1) = -1,$$

$\therefore$ 切点坐标为 $(1, -1)$, 代入切线方程得 $2 + 1 + b = 0, \therefore b = -3$,

综上: a, b 的值分别为 $a = -2, b = -3$.

$$(2) \text{ ①由 } f(x) = x \ln x + \frac{a}{2x} = 0 \text{ 得 } \ln x + \frac{a}{2x^2} = 0,$$

$$\text{令 } h(x) = \ln x + \frac{a}{2x^2} \quad (x \in 0, +\infty), \text{ 则 } h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^3} = \frac{x^2 - a}{x^3},$$

当 $a \leq 0$ 时, $h'(x) \geq 0$ 恒成立, $\therefore h(x)$ 在 $0, +\infty$ 上单调递增, 至多一个零点, 不符合题意;

当 $a > 0$ 时, 在 $x \in 0, \sqrt{a}$ 上, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减, 在 $x \in \sqrt{a}, +\infty$ 上, $h'(x) > 0$,

$h(x)$ 单调递增,

$$\text{所以 } h(x)_{\min} = h(\sqrt{a}) = \ln \sqrt{a} + \frac{1}{2},$$

若 $\ln \sqrt{a} + \frac{1}{2} > 0$, 即 $a > \frac{1}{e}$, $h(x)$ 无零点,

若 $\ln \sqrt{a} + \frac{1}{2} = 0$, 即 $a = \frac{1}{e}$, $h(x)$ 有且仅有一个零点, 皆不符合题意;

若 $\ln \sqrt{a} + \frac{1}{2} < 0$, 即 $0 < a < \frac{1}{e}$, 由 $h(\sqrt{a}) < 0$, 且 $h(1) = \frac{a}{2} > 0$, $\sqrt{a} < 1$,

$\therefore h(x)$ 在 $\sqrt{a}, +\infty$ 上有且仅有一个零点。以下考察 $x \in (0, \sqrt{a})$ 上的零点情况:

令 $u(x) = 1 - \frac{1}{x} - \ln x, x \in (0, 1)$, 则 $u'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x^2} > 0$, $\therefore u(x)$ 为增函数, $\therefore$

$$u(x) < u(1) = 0, \therefore 1 - \frac{1}{x} < \ln x,$$

$$\therefore h(x) > 1 - \frac{1}{x} + \frac{a}{2x^2} > -\frac{1}{x} + \frac{a}{2x^2}, \therefore h\left(\frac{a}{2}\right) > 0, \text{ 且 } \frac{a}{2} - \sqrt{a} = \frac{\sqrt{a}}{2} \sqrt{a} - 2 < 0 \text{ 即 } \frac{a}{2} < \sqrt{a},$$

$\therefore h(x)$ 在 $x \in (0, \sqrt{a})$ 上有且仅有一个零点, $\therefore h(x)$ 有两个不相等的零点, 符合题意。

综上: $0 < a < \frac{1}{e}$.

②不妨设 $x_1 < x_2$, 由①知 $0 < x_1 < \sqrt{a} < x_2$, 要证 $x_1 x_2 > a$, 即证 $x_2 > \frac{a}{x_1}$, 且 $x_2, \frac{a}{x_1} \in \sqrt{a}, +\infty$,

又 $h(x)$ 在 $\sqrt{a}, +\infty$ 单调递增, 所以只要证 $h(x_2) > h\left(\frac{a}{x_1}\right)$,

又 $h(x_2) = h(x_1)$, 所以只要证 $h(x_1) > h\left(\frac{a}{x_1}\right)$.

$$\therefore h(x_1) - h\left(\frac{a}{x_1}\right) = \ln x_1 + \frac{a}{2x_1^2} - \ln \frac{a}{x_1} - \frac{a}{2\left(\frac{a}{x_1}\right)^2} = 2\ln x_1 + \frac{a}{2x_1^2} - \ln a - \frac{x_1^2}{2a}, \text{ 其中 } 0 < x_1 < \sqrt{a},$$

$$\text{设 } v(x) = 2\ln x + \frac{a}{2x^2} - \ln a - \frac{x^2}{2a} \quad (0 < x < \sqrt{a}),$$

$$\text{则 } v'(x) = \frac{2}{x} - \frac{a}{x^3} - \frac{x}{a} = \frac{2ax^2 - a^2 - x^4}{ax^3} = \frac{-(x^2 - a)^2}{ax^3} < 0,$$

$\therefore v(x)$ 在 $(0, \sqrt{a})$ 上单调递减, $\therefore v(x) > v(\sqrt{a}) = 0$, $\therefore h(x_1) > h\left(\frac{a}{x_1}\right)$, $\therefore x_1 x_2 > a$.

20.(本小题满分 16 分)

已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 都是单调递增数列, 若将这两个数列的项按由小到大的顺序排成一列(相同的项视为一项), 则得到一个新数列 $\{c_n\}$.

(1) 设数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 分别为等差、等比数列, 若 $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 = b_3$, $a_6 = b_5$, 求 c_{20} ;

(2) 设 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 各项为正整数, $b_n = 3^n$, 若新数列 $\{c_n\}$ 是等差数列, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n ;

(3) 设 $b_n = q^{n-1}$ (q 是不小于 2 的正整数), $c_1 = b_1$, 是否存在等差数列 $\{a_n\}$, 使得对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, 在 b_n 与 b_{n+1} 之间数列 $\{a_n\}$ 的项数总是 b_n ? 若存在, 请给出一个满足题意的等差数列 $\{a_n\}$; 若不存在, 请说明理由.

【解】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ,

由题意得, $\begin{cases} 1+d = q^2 \\ 1+5d = q^4 \end{cases}$, 解得 $d = 0$ 或 3 , 因数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 单调递增,

所以 $d > 0, q > 1$, 所以 $d = 3, q = 2$, 所以 $a_n = 3n - 2, b_n = 2^{n-1}$2 分

因为 $b_1 = a_1, b_3 = a_2, b_5 = a_6, b_7 > a_{20}$, 所以 $c_{20} = a_{17} = 49$4 分

(2) 设等差数列 $\{c_n\}$ 的公差为 d , 又 $a_1 = 1$, 且 $b_n = 3^n$,

所以 $c_1 = 1$, 所以 $c_n = dn + 1 - d$. 因为 $b_1 = 3$ 是 $\{c_n\}$ 中的项, 所以设 $b_1 = c_n$, 即 $d(n-1) = 2$.

当 $n \geq 4$ 时, 解得 $d = \frac{2}{n-1} < 1$, 不满足各项为正整数;6 分

当 $b_1 = c_3 = 3$ 时, $d = 1$, 此时 $c_n = n$, 只需取 $a_n = n$, 而等比数列 $\{b_n\}$ 的项都是等差数列 $\{a_n\}$ 中的项, 所以 $S_n = \frac{1}{2}n(n+1)$;8 分

当 $b_1 = c_2 = 3$ 时, $d = 2$, 此时 $c_n = 2n - 1$, 只需取 $a_n = 2n - 1$,

由 $3^n = 2m - 1$, 得 $m = \frac{3^n + 1}{2}$, 3^n 是奇数, $3^n + 1$ 是正偶数, m 有正整数解,

所以等比数列 $\{b_n\}$ 的项都是等差数列 $\{a_n\}$ 中的项, 所以 $S_n = n^2$10 分

综上所述, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ 或 $S_n = n^2$11 分

(3) 存在等差数列 $\{a_n\}$, 只需首项 $a_1 \in (1, q)$, 公差 $d = q - 1$13 分

下证 b_n 与 b_{n+1} 之间数列 $\{a_n\}$ 的项数为 b_n . 即证对任意正整数 n , 都有 $\begin{cases} b_n < a_{b_1+b_2+\dots+b_{n-1}+1} \\ b_{n+1} > a_{b_1+b_2+\dots+b_n} \end{cases}$,

即 $\begin{cases} b_n < a_{1+q+q^2+\dots+q^{n-2}+1} \\ b_{n+1} > a_{1+q+q^2+\dots+q^{n-1}} \end{cases}$ 成立.

$$\text{由 } b_n - a_{1+q+q^2+\cdots q^{n-2}+1} = q^{n-1} - a_1 - (1+q+q^2+\cdots q^{n-2})(q-1) = 1 - a_1 < 0,$$

$$b_{n+1} - a_{1+q+q^2+\cdots q^{n-1}} = q^n - a_1 - (1+q+q^2+\cdots q^{n-2} + q^{n-1} - 1)(q-1) = q - a_1 > 0.$$

所以首项 $a_1 \in (1, q)$, 公差 $d = q - 1$ 的等差数列 $\{a_n\}$ 符合题意.16 分